Przedmowa

W Szkole Głównej Handlowej rachunek prawdopodobieństwa jest przedmiotem obowiązkowym na kierunku Metody Ilościowe w Ekonomii i Systemy Informacyjne oraz na kierunku Ekonomia, a także na niektórych ścieżkach innych kierunków studiów. W ostatnich latach cieszy się on coraz większym zainteresowaniem studentów. Słuchacze wykładu mogą korzystać między innymi z napisanego przez jednego ze współautorów i wydanego przez Oficynę Wydawniczą SGH skryptu „Rachunek prawdopodobieństwa" zawierającego teorię i przykładowe zadania oraz z dostępnych za pośrednictwem Internetu zadań z kolokwiów i egzaminów.

Problemem, na który często zwracali uwagę studenci, był brak rozwiązań wspomnianych zadań, co utrudniało im samodzielną naukę. Skłoniło nas to do opracowania rozwiązań tematów z kolokwiów i egzaminów z lat 1996-2006.

Zadania zostały podzielone na pięć rozdziałów. Rozdział 1 zawiera zadania dotyczące pojęcia prawdopodobieństwa i schematu Bernoulliego. W rozdziale 2 znalazły się zadania, w których bada się własności jednowymiarowych zmiennych losowych, a w rozdziale 3 – dotyczące wielowymiarowych zmiennych losowych. Rozdział 4 poświęcony jest funkcjom charakterystycznym, a ostatni, rozdział 5 – twierdzeniom granicznym. Zdecydowana większość zadań zawiera pełne rozwiązania. Same odpowiedzi podane są tylko w przypadku zadań, których sposób rozwiązania jest analogiczny z podanym wcześniej. Stosowane oznaczenia i terminologia są zgodne z oznaczeniami i terminologią używaną we wspomnianym powyżej skrypcie z rachunku prawdopodobieństwa.

Dziękujemy serdecznie pani dr Agnieszce Groniowskiej, która dokładnie przeczytała pierwszą wersję niniejszego zbioru zadań i sprawdziła rozwiązania. Dzięki jej uwagom i sugestiom dokonaliśmy wielu poprawek i usunęliśmy zauważone błędy.

Autorzy

ROZDZIAŁ 1

Prawdopodobieństwo

1.1. Prawdopodobieństwo geometryczne

1.1. Z przedziału $\langle -2, 2\rangle$ wybrano losowo dwie liczby x i y. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) $xy \leq 1$,
b) $xy \leq 2$,
c) $x^2 - 1 \leq y$,
d) $\frac{3}{4}x^2 - 1 \leq y \leq x$.

1.2. Wybieramy losowo dwie liczby x i y z przedziału $\langle -1, 1\rangle$. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) $2x^2 - 1 \leq y \leq -x$,
b) $y^2 \leq x^2 y$.

1.3. Z przedziału $\langle -1, 1\rangle$ wybrano losowo dwie liczby a i b.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że trójmian kwadratowy

$$y = ax^2 + 2bx + 1$$

nie ma rzeczywistych pierwiastków.

b) Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że pierwiastki równania

$$ax^2 + bx + 1 = 0$$

są rzeczywiste.

1.4. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że pierwiastki równania

$$x^2 + bx + c = 0$$

są rzeczywiste, jeśli liczby b i c zostały wybrane losowo z przedziału:

a) $\langle -1, 1\rangle$,
b) $\langle -2, 2\rangle$.

1.5. W zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że $x + y \leq a$, jeśli liczby x i y wybrane zostały losowo z przedziału:

a) $\langle -1, 2\rangle$,
b) $\langle -2, 1\rangle$.

1.6. Z przedziału $\langle 0,1\rangle$ wybieramy losowo dwie liczby x i y. W zależności od wartości parametru $a\in\mathbb{R}$ wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) $xy\le a$,
b) $xy\ge a$,
c) $x^2y\le a$,
d) $xy^2\le a$,
e) $y\le x^2+a$,
f) $y\ge a+\sqrt{x}$.

1.7. Z przedziału $\langle 0,2\rangle$ wybieramy losowo dwie liczby x i y. W zależności od wartości parametru $a\in\mathbb{R}$ wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia $xy\le a$.

1.8. Z przedziału $\langle 0,1\rangle$ wybieramy losowo dwa punkty x i y. Dla jakich $a\in\mathbb{R}$ prawdopodobieństwo zdarzenia $xy\ge a$ jest większe od $\frac{1}{2}$?

1.9. Z przedziału $\langle 0,2\rangle$ wybieramy losowo dwa punkty x i y. Dla jakich $a\in\mathbb{R}$ prawdopodobieństwo zdarzenia $xy\le a$ jest większe od $\frac{1}{2}$?

1.10. Z przedziału $\langle -1,1\rangle$ wybieramy losowo dwie liczby x i y. Wyznaczyć, w zależności od wartości parametru $a\in\mathbb{R}$, prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) $ax^2-y\ge 0$,
b) $ax^2-y\le 0$.

1.11. Wybieramy losowo dwa punkty x i y z przedziału $\langle -1,1\rangle$. Wyznaczyć, w zależności od wartości parametru $a\ge 0$ prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) $ay\le x^2-1$,
b) $y\ge a-x^2$.

1.12. Z przedziału $\langle -1,1\rangle$ wybieramy losowo dwa punkty x i y. W zależności od wartości parametru $m\in\mathbb{R}$ wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) $y\le mx+1$,
b) $y\le m(x+1)$.

1.13. Z przedziału $\langle -1,1\rangle$ wybieramy losowo dwa punkty x, y. Dla jakich $m\in\mathbb{R}$ spełniony jest warunek:

a) $P\left(A_m\right)\ge\frac{1}{3}$, gdzie A_m oznacza zdarzenie $|x-y|\le m$, dla $m\in\mathbb{R}$,
b) $P\left(A_m\right)\le\frac{1}{4}$, gdzie A_m oznacza zdarzenie $|x+y|\le m$, dla $m\in\mathbb{R}$.

1.14. Z przedziału $\langle 0,1\rangle$ wybieramy losowo dwa punkty x i y. Niech A_a oznacza zdarzenie $y\le a$, gdzie $a\in\mathbb{R}$. Obliczyć, w zależności od wartości parametru $a\in\mathbb{R}$, prawdopodobieństwo $P(A_a\cup B)$, gdzie B oznacza zdarzenie:

a) $y\le\frac{1}{x}-1$,
b) $y\le\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

1.15. Z przedziału $\langle 0,1\rangle$ wybieramy losowo dwa punkty x i y. Niech A oznacza zdarzenie losowe $x+y\le 1$, B – zdarzenie losowe $y\le ax^2$, gdzie $a\in\mathbb{R}$. Obliczyć, w zależności od wartości parametru a, prawdopodobieństwo $P\left(A\cup B\right)$.

1.16. Z przedziału $\langle -1, 1\rangle$ wybieramy losowo dwa punkty x i y. W zależności od wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ obliczyć $P(A_m \cap B)$, gdzie:

a) A_m oznacza zdarzenie $x + y \leq m$, B oznacza zdarzenie $y \leq \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$,
b) A_m oznacza zdarzenie $y \leq x + m$, B oznacza zdarzenie $y \leq -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

1.17. Z przedziału $(0, 1)$ wybieramy losowo dwa punkty x i y. W zależności od wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia $\frac{y}{x} \leq m$.

1.18. Z przedziału $\langle -1, 1\rangle$ wybieramy losowo dwa punkty x i y. W zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia $y \geq a\,|x|$.

1.19. Z przedziału $\langle -1, 1\rangle$ wybieramy losowo dwa punkty x i y. Niech A_m, gdzie $m \in \mathbb{R}$, oznacza zdarzenie $y \leq x + m$. W zależności od wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ obliczyć $P(A_m)$.

1.20. Z przedziału $\langle -2, 2\rangle$ wybieramy losowo dwa punkty x i y. Niech A_m, gdzie $m \in \mathbb{R}$, oznacza zdarzenie: $y + x \geq m$. W zależności od wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ obliczyć $P(A_m)$.

1.21. Z obszaru $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq e \wedge 0 \leq y \leq \frac{2}{x}\right\}$ wybieramy losowo punkt (x, y). Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że $x + y \leq 3$.

1.22. Z obszaru $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq e^2 \wedge 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}$ wybieramy losowo punkt (x, y). Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że $x - 3y \geq 0$.

1.23. Z obszaru $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi \wedge 0 \leq y \leq \sin x\right\}$ wybieramy losowo punkt (x, y).

a) W zależności od wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ obliczyć $P(x \leq t)$.
b) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ spełniony jest warunek $P(x \leq t) = \frac{1}{2}$? Odpowiedź uzasadnić.

1.2. Własności prawdopodobieństwa

1.24. Wykazać, że jeśli zdarzenia losowe A, B spełniają warunek $A \subset B$, to $P(B - A) = P(B) - P(A)$ i $P(A) \leq P(B)$.

1.25. Wykazać, że jeśli zdarzenia losowe A i B są niezależne, to niezależne są również zdarzenia:

a) A' i B,
b) A' i B'.

1.26. Niech A i B będą niezależnymi zdarzeniami losowymi takimi, że $0 < P(A) < 1$ oraz $0 < P(B) < 1$. Zbadać niezależność zdarzeń losowych:

a) $C = A \cap B$ i $D = A - B$,
b) $C = A - B$ i $D = B - A$.

1.27. Niech A, B będą niezależnymi zdarzeniami losowymi. Zbadać niezależność zdarzeń $C = A \cap B$ i $D = A \cup B$.

1.28. Dane są takie trzy łącznie niezależne zdarzenia losowe A, B, C, że $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(C) = \frac{1}{4}$.

a) Obliczyć $P(A \cup B \cup C)$.

b) Obliczyć $P((A \cup C) - B)$.

1.29. Dane są takie trzy łącznie niezależne zdarzenia losowe A_1, A_2, A_3, że $P(A_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i$ dla $i = 1, 2, 3$.

a) Obliczyć $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$.

b) Obliczyć $P((A_1 \cup A_2) - A_3)$.

1.30. Niech A_1, A_2, A_3, A_4 będą łącznie niezależnymi zdarzeniami losowymi takimi, że $P(A_j) = \frac{1}{j+1}$ dla $j = 1, 2, 3, 4$. Obliczyć:

a) $P(A_1 \cup A_2)$,

b) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$,

c) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$.

1.31. Niech A_1, A_2, A_3, A_4 będą łącznie niezależnymi zdarzeniami losowymi takimi, że $0 < P(A_j) < 1$ dla $j = 1, 2, 3, 4$. Zbadać niezależność zdarzeń C i D, gdzie:

a) $C = A_1 - (A_2 \cup A_3)$, $D = A_2 \cup A_3 \cup A_4$,

b) $C = (A_1 \cup A_2) - A_3$, $D = A_2 \cap A_3 \cap A_4$.

1.32. Obliczyć $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$, jeśli (A_n) jest ciągiem zdarzeń losowych parami rozłącznych takich, że:

a) $P(A_1) = \frac{1}{4}$ i $P(A_n \cup A_{n+1}) = \frac{5}{4^{n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N}$,

b) $P(A_1) = \frac{1}{3}$ i $P(A_n \cup A_{n+1}) = \frac{4}{3^{n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

1.33. Niech (A_n) będzie ciągiem parami rozłącznych zdarzeń losowych. Obliczyć $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ oraz $P(A_1)$, jeżeli:

a) $P(A_n \cup A_{n+1}) = \frac{7}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

b) $P(A_n \cup A_{n+1}) = \frac{5}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

1.34. Wykazać, że dla dowolnego wstępującego ciągu zdarzeń losowych (A_n) spełniony jest warunek $\lim_{n\to\infty} P(A_{n+1} - A_n) = 0$.

1.35. Niech (A_n) będzie zstępującym ciągiem zdarzeń losowych spełniających warunek $\lim_{n\to\infty} P(A_n) > 0$. Wykazać, że $\lim_{n\to\infty} P(A_{n+1}|A_n) = 1$.

1.36. Niech (A_n) będzie wstępującym ciągiem zdarzeń losowych takich, że

$$P(A_{n+1} - A_n) = \frac{1}{n(n+1)}, \; P(A_n|A_{n+1}) = 1 - \frac{1}{n^2} \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Obliczyć $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.