

IDŹ DO

PRZYKŁADOWY ROZDZIAŁ



SPIS TREŚCI

KATALOG KSIĄŻEK

KATALOG ONLINE

ZAMÓW DRUKOWANY KATALOG

TWÓJ KOSZYK

DODAJ DO KOSZYKA

CENNIK I INFORMACJE

ZAMÓW INFORMACJE
O NOWOŚCIACH

ZAMÓW CENNIK

CZYTELNIA

FRAGMENTY KSIĄŻEK ONLINE

Teoria sygnałów. Wstęp. Wydanie II poprawione i uzupełnione

Autorzy: Jacek Izydorczyk, Grzegorz Płonka, Grzegorz Tyma

ISBN: 83-246-0401-4

Format: B5, stron: 304



Kompedium wiedzy na temat sygnałów i metod ich przetwarzania

- Modulacja sygnałów
- Transformaty Fouriera i Laplace'a
- Filtry analogowe i cyfrowe

Teoria sygnałów to jedna z fundamentalnych dziedzin wiedzy technicznej. Jej znajomość jest niezbędna nie tylko projektantom urządzeń elektronicznych, ale również automatykom, informatykom, elektrotechnikom i specjalistom od telekomunikacji. Rozwój techniki cyfrowej zrewolucjonizował metody przetwarzania sygnałów, lecz podstawy tych mechanizmów są niezienne – nadal wykorzystywane są transformaty Fouriera i Laplace'a, klasyczne algorytmy modulacji oraz reguły projektowania urządzeń.

Książka „Teoria sygnałów. Wstęp. Wydanie II” to kolejne wydanie publikacji poświęconej sygnałom i ich przetwarzaniu. Zawiera zbiór najważniejszych informacji związanych z przekształcaniem i modulowaniem sygnałów metodami analogowymi i cyfrowymi oraz projektowaniem filtrów aktywnych i pasywnych. Każdy jej rozdział stanowi osobny wykład uzupełniony przykładami i zadaniami do samodzielnego rozwiązania, który można przeczytać bez odwoływania się do pozostałych wykładów.

- Szeregi i transformaty Fouriera
- Modulacja sygnałów
- Przekształcenie Laplace'a
- Projektowanie filtrów analogowych
- Sygnały dyskretne i cyfrowe
- Modulacja impulsowa
- Dyskretna transformata Fouriera
- Liniowe układy cyfrowe
- Projektowanie filtrów cyfrowych

Opanuj podstawy technologii cyfrowej





Spis treści

Rozdział 1. Szereg Fouriera	9
1.1. Wstęp	9
1.2. Definicja rozwinięcia w szereg Fouriera	10
1.3. Warunki Dirichleta	16
1.4. Wybrane własności szeregów Fouriera	18
1.5. Stan ustalony w obwodach liniowych z wymuszeniami okresowymi	20
1.6. Przykłady zastosowań szeregów Fouriera	22
1.7. Literatura	26
1.8. Zadania	26
Rozdział 2. Transformacja Fouriera	31
2.1. Definicja przekształcenia Fouriera	31
2.2. Warunki Dirichleta istnienia transformaty Fouriera	33
2.3. Wybrane własności przekształcenia Fouriera	34
2.4. Gęstość widmowa sygnału na wyjściu układu liniowego	39
2.5. Przykłady	39
2.6. Literatura	48
Rozdział 3. Modulacja	49
3.1. Wstęp	49
3.2. Modulacja w paśmie podstawowym	50
3.3. Modulacja sygnału sinusoidalnego	51
3.3.1. Modulacja amplitudowa	51
3.3.2. Przemiana częstotliwości	58
3.3.3. Modulacja kątowna	60
3.3.4. Modulacja kwadraturowa	64
3.4. Literatura	65
3.5. Zadania	66

Rozdział 4. Przekształcenie Laplace'a	67
4.1. Przekształcenie Laplace'a	67
4.2. Odwrotna transformacja Laplace'a	73
4.2.1. Wzór Riemanna-Mellina	73
4.2.2. Funkcje wymierne, residua i rozkład na ułamki proste	77
4.3. Własności przekształcenia Laplace'a	81
4.3.1. Liniowość transformaty	81
4.3.2. Transformata pochodnej sygnału $\mathcal{L}$ -transformowalnego	81
4.3.3. Transformata całki sygnału $\mathcal{L}$ -transformowalnego	82
4.3.4. Granica sygnału w zerze	82
4.3.5. Pochodna transformaty sygnału $\mathcal{L}$ -transformowalnego	82
4.3.6. Opóźnienie sygnału $\mathcal{L}$ -transformowalnego	83
4.3.7. Przesunięcie argumentu obrazu $\mathcal{L}$ -transformowalnego	83
4.3.8. Transformata sygnału okresowego	83
4.3.9. Transformata spłotu sygnałów $\mathcal{L}$ -transformowalnych	84
4.4. Zastosowanie przekształcenia Laplace'a	84
4.4.1. Równania różniczkowe zwyczajne	84
4.4.2. Równania różniczkowe cząstkowe	88
4.4.3. Równania całkowe	90
4.5. Transmitancja	91
4.5.1. Odpowiedź impulsowa układu	94
4.5.2. Badanie stabilności układu	95
4.5.3. Transmitancja operatorowa a transmitancja symboliczna	100
4.6. Literatura	102
4.7. Zadania	102
Rozdział 5. Filtry analogowe	105
5.1. Filtr idealny	105
5.2. Aproksymacja charakterystyki amplitudowej filtru idealnego	108
5.2.1. Filtr Butterwortha	108
5.2.2. Aproksymacja Czebyszewa	116
5.2.3. Przekształcenia częstotliwości	122
5.3. Synteza pasywnych filtrów LC o charakterystyce Butterwortha i Czebyszewa	132
5.3.1. Obwód łańcuchowy otwarty na końcu	133
5.3.2. Obciążony obwód łańcuchowy	141
5.3.3. Wzory dla syntezy filtrów Butterwortha — symetryczny obwód łańcuchowy	143
5.3.4. Wzory dla syntezy filtrów Butterwortha	144
5.3.5. Wzory dla syntezy filtrów Czebyszewa	146
5.3.6. Przekształcenia częstotliwości raz jeszcze	148
5.3.7. Kilka słów o projektowaniu filtrów pasywnych	152
5.4. Synteza filtrów aktywnych RC	153
5.4.1. Idealny wzmacniacz operacyjny	153
5.4.2. Kaskadowy filtr aktywny	157
5.4.3. Równoległy filtr aktywny	157
5.4.4. Transmitancje rzędu drugiego	158
5.4.5. Układy z wielokrotnym sprzężeniem zwrotnym	160
5.5. Charakterystyka opóźnienia grupowego	164
5.5.1. Opóźnienie grupowe filtru o stałych skupionych	164

5.5.2.	Wyrównywanie charakterystyki fazowej filtra	166
5.5.3.	Meandry przyczynowości	169
5.6.	Literatura	172
5.7.	Zadania	173
Rozdział 6. Modulacja impulsowa, sygnały dyskretne i cyfrowe		175
6.1.	Transformata Fouriera dystrybucji delta Diraca	175
6.1.1.	Transformaty Fouriera funkcji trygonometrycznych	175
6.1.2.	Transformata Fouriera skoku jednostkowego	176
6.1.3.	Transformata Fouriera całki sygnału	178
6.1.4.	Transformata Fouriera szeregu impulsów Diraca	179
6.1.5.	Transformata Fouriera funkcji okresowej	181
6.1.6.	Reguła sumacyjna Poissona	182
6.2.	Sygnał o ograniczonym paśmie częstotliwości i sygnał o ograniczonym czasie trwania	183
6.2.1.	Nierówność Schwartza	183
6.2.2.	Własności sygnałów o ograniczonym czasie trwania	184
6.2.3.	Własności sygnałów o ograniczonym paśmie częstotliwości	185
6.3.	Sygnał dyskretny	189
6.3.1.	Modulacja impulsowa — sygnał dyskretny	189
6.3.2.	Widmo sygnału dyskretnego	190
6.3.3.	Odtwarzanie sygnału analogowego na podstawie sygnału dyskretnego	191
6.3.4.	Twierdzenie Kotelnikowa-Shannona-Nyquista	194
6.3.5.	Wpływ kształtu sygnałów próbkujących na widmo sygnału zmodulowanego	195
6.3.6.	Decymacja i interpolacja	196
6.3.7.	Dowód twierdzenia o próbkowaniu bez teorii dystrybucji	198
6.3.8.	Próbkowanie sygnałów pasmowych — obwódni sygnału	200
6.4.	Sygnał cyfrowy	206
6.4.1.	Stałoprzecinkowy, binarny format zapisu liczb	206
6.4.2.	Zmiennoprzecinkowy, binarny format zapisu liczb	207
6.4.3.	Podział kanału w dziedzinie czasu (TDM — time division multiplexing)	209
6.4.4.	Szumy kwantowania	210
6.4.5.	Przetwarzanie $\Delta\Sigma$	211
6.4.6.	Wzór Shannona	223
6.5.	Literatura	224
6.6.	Zadania	225
Rozdział 7. Dyskretna transformacja Fouriera		227
7.1.	Dyskretna transformacja Fouriera	227
7.1.1.	Sygnał dyskretny o skończonym czasie trwania i jego widmo	227
7.1.2.	Dyskretna transformacja Fouriera	229
7.1.3.	Własności DFT	231
7.2.	Szybki algorytm obliczania dyskretnej transformaty Fouriera (FFT)	240
7.2.1.	Algorytm FFT z podziałem w dziedzinie czasu	240
7.2.2.	Algorytm FFT z podziałem w dziedzinie częstotliwości	242
7.2.3.	O dodawaniu i mnożeniu liczb przez komputery	244
7.2.4.	Przykłady zastosowań DFT poza cyfrowym przetwarzaniem sygnałów	249
7.3.	Algorytm świergotowy	252

7.4.	Literatura	255
7.5.	Zadania	255
Rozdział 8.	Transformacja $\mathcal{Z}$	257
8.1.	Wstęp	257
8.2.	Definicja transformacji $\mathcal{Z}$	257
8.3.	Transformacja odwrotna	260
8.4.	Transformacja $\mathcal{Z}$ sygnału przyczynowego	261
8.5.	Transformacja sygnału stabilnego	262
8.6.	Własności transformacji $\mathcal{Z}$	263
8.7.	Związek z transformacją Fouriera	267
8.8.	Literatura	268
8.9.	Zadania	268
Rozdział 9.	Liniowe układy dyskretne	269
9.1.	Wstęp	269
9.2.	Równania różnicowe i równania stanu	269
9.3.	Odpowiedź impulsowa	272
9.4.	Transmitancja	273
9.5.	Przyczynowość i stabilność układów cyfrowych a obszar zbieżności transmitancji	276
9.6.	Charakterystyka częstotliwościowa a zera i bieguny transmitancji	276
9.7.	Literatura	277
9.8.	Zadania	278
Rozdział 10.	Filtry cyfrowe	279
10.1.	Filtry SOI	280
10.1.1.	Metoda okien czasowych	281
10.2.	Filtry NOI	285
10.2.1.	Projektowanie filtrów NOI	285
10.3.	Literatura	292
Skorowidz		293

Transformacja Fouriera

Grzegorz Tyma

2

2.1. Definicja przekształcenia Fouriera

Spróbujmy znaleźć wzory na transformację Fouriera sygnałów aperiodycznych, korzystając z wyników otrzymanych dla szeregów Fouriera. Pomysł jest następujący: niech analizowany sygnał aperiodyczny zostanie na chwilę zamieniony na okresowy przez jego powielenie z okresem T . Dla takiego sygnału potrafimy znaleźć rozwinięcie. Następnie sprawdzimy, jak będą się zachowywały współczynniki rozwinięcia w przypadku, gdy z okresem będziemy zdążać do nieskończoności. Zabieg ten spowoduje, iż nasz sztucznie powielony, okresowy przebieg znów zamieni się w sygnał aperiodyczny.

Rozpatrzmy przypadek sygnału okresowego, którego rozwinięcie zostało znalezione w przykładzie 1.8, w rozdziale poświęconym szeregom Fouriera. Sygnał ten, o okresie T , może być opisany wzorem

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } |t| < T_1, \\ 0, & \text{gdy } T_1 < |t| < T/2. \end{cases} \quad (2.1)$$

Znalezione współczynniki rozwinięcia mają postać

$$c_k = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}, \quad \text{gdzie } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.2)$$

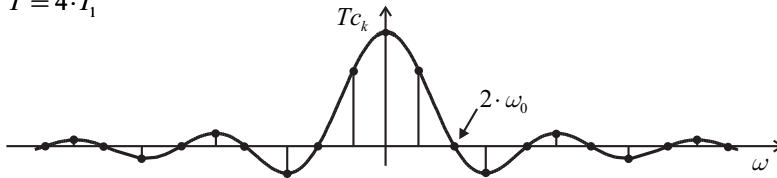
Zdefiniujmy nową wielkość w postaci

$$T c_k = \left. \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega} \right|_{\omega = k\omega_0} \quad (2.3)$$

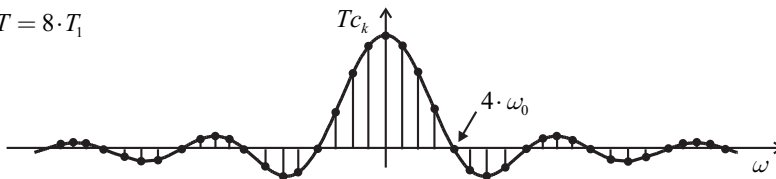
i nazwijmy funkcję stojącą po prawej stronie równości *obwiednią*. Współczynniki rozwinięcia mogą być traktowane jako próbki obwiedni pobierane w równych odstępach

(rysunek 2.1). Dla ustalonej wartości T_1 obwiednia jest niezależna od T . Wraz ze wzrostem T maleją odstęp między pobieranymi próbkami obwiedni. W granicznym przypadku, gdy T dąży do nieskończoności, sygnał okresowy staje się sygnałem aperiodycznym, a próbki Tc_k tworzą obwiednię.

a) $T = 4 \cdot T_1$



b) $T = 8 \cdot T_1$



Rysunek 2.1. Obwiednia Tc_k i próbki pobierane z niej z okresem próbkowania **(a)** $T = 4T_1$ i **(b)** $T = 8T_1$

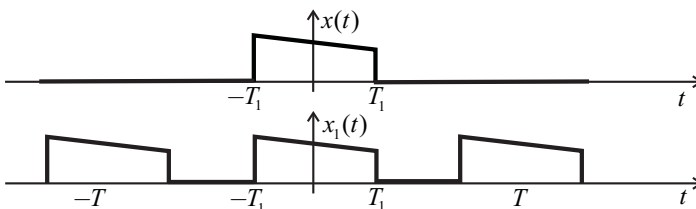
Oznaczmy sztucznie utworzony sygnał okresowy przez $x_1(t)$ (rysunek 2.2). Możemy dla niego napisać znane wzory rozwinięcia w szereg Fouriera:

$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad (2.4a)$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad (2.4b)$$

gdzie $\omega_0 = 2\pi/T$. Sygnał okresowy $x_1(t)$ powstał przez powielenie z okresem T sygnału $x(t)$, zatem $x_1(t) = x(t)$ dla $|t| < T/2$, ponadto $x(t) = 0$ poza tym przedziałem. Korzystając z tych informacji możemy poprzedni wzór zapisać w postaci

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt. \quad (2.5)$$



Rysunek 2.2. Sygnał aperiodyczny $x(t)$ i sztucznie utworzony sygnał okresowy $x_1(t)$

Zatem obwiednię $X(j\omega)$ z Tc_k można przedstawić jako

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.6)$$

Współczynniki rozwinięcia wyliczamy:

$$c_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0). \quad (2.7)$$

Korzystając z tego, otrzymujemy

$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0. \quad (2.8)$$

Gdy okres T dąży do nieskończoności, to $x_1(t)$ dąży do $x(t)$, a ω_0 dąży do zera. W efekcie w ostatnim wzorze $x(t)$ zastąpi $x_1(t)$, a po prawej stronie suma zostanie zastąpiona całką

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.9)$$

Ostatecznie otrzymaliśmy parę wzorów na proste i odwrotne przekształcenie Fouriera:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (2.10a)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.10b)$$

Funkcja po transformacji może być zapisana we współrzędnych biegunowych:

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\arg[X(j\omega)]}. \quad (2.11)$$

Moduł $X(\omega) = |X(j\omega)|$ nosi nazwę gęstości widmowej amplitudy, natomiast faza $\varphi(\omega) = \arg[X(j\omega)]$ nazywana jest gęstością widmową fazy (często zamiennie mówi się o widmie amplitudowym i fazowym).

Podane zostaną teraz warunki, jakie musi spełniać funkcja $x(t)$, aby można było znaleźć jej transformatę Fouriera.

❖ 2.2. Warunki Dirichleta istnienia transformaty Fouriera

Podobnie jak dla sygnałów okresowych podaje się trzy warunki, zwane warunkami Dirichleta, na istnienie transformacji Fouriera funkcji $x(t)$.

Warunek 1. Funkcja $x(t)$ jest bezwzględnie całkowalna, tzn.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (2.12)$$

Warunek 2. Funkcja $x(t)$ ma skończoną liczbę maksimów i minimów w dowolnym skończonym przedziale.

Warunek 3. Funkcja $x(t)$ ma skończoną liczbę punktów nieciągłości w dowolnym skończonym przedziale. Ponadto wartości funkcji w tych punktach muszą być ograniczone.

W kolejnym podrozdziale przedstawiono wybrane własności przekształcenia Fouriera.

❖ 2.3. Wybrane własności przekształcenia Fouriera

Liniowość

Jeżeli

$$x(t) \triangleq X(j\omega) \quad \text{oraz} \quad y(t) \triangleq Y(j\omega), \quad (2.13a)$$

to

$$a x(t) + b y(t) \triangleq a X(j\omega) + b Y(j\omega). \quad (2.13b)$$

Dowód twierdzenia o liniowości przekształcenia Fouriera jest łatwy i wynika wprost ze wzoru na proste przekształcenie Fouriera.

Przesunięcie w czasie

Jeżeli $x(t) \triangleq X(j\omega)$, to $x(t - t_0) \triangleq e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$. Udowodnijmy to. Wiemy, iż

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.14)$$

Wprowadzając przesunięcie w czasie, otrzymujemy

$$x(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t_0} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.15)$$

Dostajemy zatem

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} X(j\omega). \quad (2.16)$$

Warto zauważyć, że przesunięcie oryginału powoduje zmianę jedynie gęstości widmowej fazy, natomiast bez zmiany pozostaje gęstość widmowa amplitudy.

Przesunięcie w dziedzinie częstotliwości

Jeżeli $x(t) \triangleq X(j\omega)$, to $e^{j\omega_0 t} x(t) \triangleq X[j(\omega - \omega_0)]$. Udowodnijmy to. Wiemy, iż

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.17)$$

Wprowadzając przesunięcie w częstotliwości, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{X[j(\omega - \omega_0)]\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X[j(\omega - \omega_0)] e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{e^{j\omega_0 t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(v) e^{jv t} dv = e^{j\omega_0 t} x(t). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Różniczkowanie i całkowanie oryginału

Zróżniczkujemy wzór $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ po czasie; w efekcie otrzymamy

$$\frac{dx(t)}{dt} \triangleq j\omega X(j\omega) \quad (2.19)$$

Twierdzenie powyższe jest prawdziwe, gdy funkcja $x(t)$ jest bezwzględnie całkowna w przedziale $(-\infty, +\infty)$, ciągła i dąży do zera dla $t \rightarrow \pm\infty$ oraz ma prawie wszędzie pochodną $\dot{x}(t)$, która jest bezwzględnie całkowna w przedziale $(-\infty, +\infty)$.

Niestety wzór na transformatę Fouriera całki nie jest tak prosty, jak w przypadku transformaty Laplace'a:

$$\int_{-\infty}^t x(\zeta) d\zeta \triangleq \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0) \delta(\omega). \quad (2.20)$$

Aby go udowodnić, trzeba zauważyć, że sygnał $\int_{-\infty}^t x(\zeta) d\zeta$ jest splotem sygnału $x(t)$ z jedynką Heaviside'a

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \geq 0, \\ 0 & \text{dla } t < 0, \end{cases} \quad (2.21)$$

i zastosować twierdzenie o transformacie Fouriera splotu sygnałów¹.

Skalowanie w czasie i częstotliwości (podobieństwo)

Jeżeli $x(t) \triangleq X(j\omega)$, to dla dowolnej stałej $a > 0$ zachodzi

$$x(at) \triangleq \frac{1}{a} X\left(\frac{j\omega}{a}\right). \quad (2.22)$$

Dowód:

$$\mathcal{F}[x(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} \frac{d\tau}{a} = \frac{1}{a} X\left(\frac{j\omega}{a}\right). \quad (2.23)$$

Twierdzenie o transformacie splotu

Jeżeli

$$x(t) \triangleq X(j\omega) \quad \text{oraz} \quad y(t) \triangleq Y(j\omega), \quad (2.24a)$$

to

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) y(\tau) d\tau \triangleq X(j\omega) Y(j\omega). \quad (2.24b)$$

Udowodnijmy to:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) y(\tau) d\tau\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) y(\tau) d\tau\right] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) e^{-j\omega t} dt\right] d\tau. \end{aligned} \quad (2.25)$$

¹ Więcej o transformacie Fouriera jedynki Heaviside'a napisano w podrozdziale 6.1.2 na stronie 176.

Wprowadzając nową zmienną całkowania $u = t - \tau$, mamy $dt = du$ oraz $t = u + \tau$, wobec tego

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) y(\tau) d\tau \right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j\omega(u+\tau)} du \right] d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j\omega u} du = X(j\omega) Y(j\omega). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Wzór Parsewala

Jeżeli

$$x(t) \triangleq X(j\omega), \quad (2.27a)$$

to

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega. \quad (2.27b)$$

Spróbujmy to wykazać:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt. \quad (2.28)$$

Zmieniając kolejność całkowania, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) X(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Wzór Parsewala posiada interpretację fizyczną. Wartość całki $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ może być traktowana jako energia zamieniona na ciepło na oporniku 1Ω przy przepływie prądu $i = x(t)$ w nieskończenie wielkim przedziale czasowym. Zgodnie ze wzorem Parsewala całka z kwadratu gęstości widmowej amplitudy również przedstawia energię. Dlatego mówi się o rozkładzie energii w funkcji pulsacji, a wielkość $|X(j\omega)|^2 / (2\pi)$ nazywana jest gęstością widmową energii².

Symetria dualna

Podobieństwo wzorów na proste i odwrotne przekształcenie Fouriera pociąga za sobą dualność oryginałów i ich obrazów. Zilustrujmy to przykładem. Znajdźmy obraz dla sygnału czasowego będącego pojedynczym impulsem prostokątnym, a następnie znajdziemy oryginał dla pojedynczego impulsu prostokątnego w dziedzinie częstotliwości:

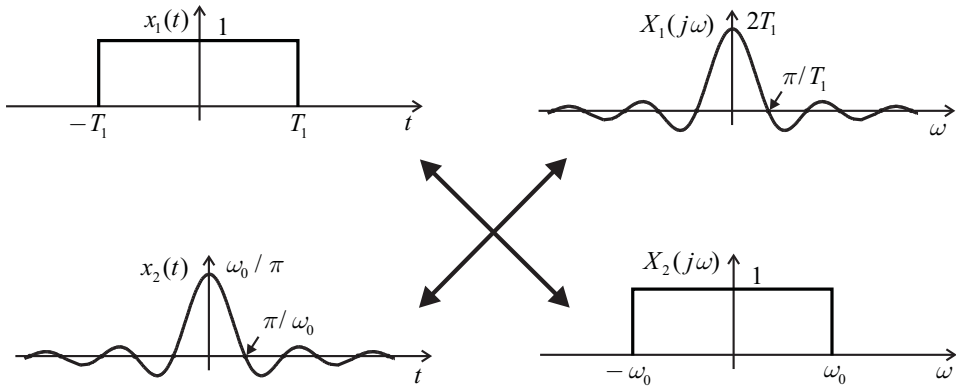
$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |t| < T_1, \\ 0 & \text{dla } T_1 < |t| \end{cases} \triangleq X_1(j\omega) = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega} \quad (2.29a)$$

$$x_2(t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t} \triangleq X_2(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |\omega| < \omega_0, \\ 0 & \text{dla } \omega_0 < |\omega|. \end{cases} \quad (2.29b)$$

² Jeżeli całkowanie we wzorze (2.27b) odbywa się względem częstotliwości f wyrażonej w hercach, a nie względem pulsacji ω wyrażonej w radianach na sekundę, to pomija się współczynnik $1/(2\pi)$.

Odpowiednie pary (oryginał i transformata) przedstawiono na rysunku 2.3. Łatwo zauważyć symetrię, jaka występuje w tych dwóch przekształceniach. Będzie ona występowała także w przypadku innych funkcji. Jeżeli tylko weźmiemy jedną funkcję i policzymy jej transformatę, a następnie oryginał potraktujemy jako obraz i zastosujemy do niego odwrotne przekształcenie, to otrzymane w ten sposób obraz i oryginał będą do siebie podobne. Możemy to zapisać w następującej postaci:

$$x(t) \triangleq X(j\omega) \Rightarrow X(t) \triangleq 2\pi x(-\omega). \quad (2.30)$$



Rysunek 2.3. Podobieństwo oryginałów i obrazów

Sprzężenie i symetria

Jeżeli

$$x(t) \triangleq X(j\omega), \quad (2.31a)$$

to

$$x^*(t) \triangleq X^*(-j\omega). \quad (2.31b)$$

Można to w prosty sposób udowodnić. Obliczając wartość sprzężoną $X(j\omega)$, otrzymujemy

$$X^*(j\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{j\omega t} dt. \quad (2.32)$$

Zamieniając ω na $-\omega$, uzyskujemy

$$X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{x^*(t)\}. \quad (2.33)$$

Jeśli $x(t)$ jest rzeczywiste i $x^*(t) = x(t)$, to na podstawie dwóch poprzednich wzorów łatwo pokazać, że

$$X(-j\omega) = X^*(j\omega) \quad \text{oraz} \quad X^*(-j\omega) = X(j\omega). \quad (2.34)$$

Jeżeli przedstawimy $X(j\omega)$ w postaci

$$X(j\omega) = \text{Re}\{X(j\omega)\} + j\text{Im}\{X(j\omega)\}, \quad (2.35)$$

to korzystając ze wzoru (2.34) otrzymujemy następujące zależności (cały czas zakładamy, że $x(t)$ jest rzeczywiste):

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\{X(j\omega)\} &= \operatorname{Re}\{X(-j\omega)\}, \\ \operatorname{Im}\{X(j\omega)\} &= -\operatorname{Im}\{X(-j\omega)\}.\end{aligned}\quad (2.36)$$

Ze wzorów tych wynika także, że gęstość widmowa amplitudy jest funkcją parzystą, a gęstość widmowa fazy — funkcją nieparzystą. Wynik ten można także otrzymać w inny sposób. Jeśli zapiszemy $e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$, to transformata Fouriera sygnału $x(t)$ może być zapisana w postaci

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega) = X_1(j\omega) - jX_2(j\omega), \quad (2.37)$$

gdzie

$$\begin{aligned}X_1(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt, \\ X_2(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt.\end{aligned}\quad (2.38)$$

Widać, że funkcja $X_1(j\omega)$ jest parzysta, zaś $X_2(j\omega)$ nieparzysta względem ω . Zatem łatwo pokazać, iż gęstość widmowa amplitudy jest funkcją parzystą, a gęstość widmowa fazy funkcją nieparzystą względem ω .

W tabeli 2.1 zebrano niektóre własności transformaty Fouriera. Natomiast w tabeli 2.2 znalazły się wybrane pary transformat. Wyliczenia poszczególnych transformat Czytelnik może znaleźć w podrozdziale zawierającym przykłady.

Tabela 2.1. Własności transformaty Fouriera

Własność	Sygnał aperiodyczny $x(t), y(t)$	Transformata Fouriera $X(j\omega), Y(j\omega)$
Liniowość	$a x(t) + b y(t)$	$a X(j\omega) + b Y(j\omega)$
Przesunięcie w czasie	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
Przesunięcie w częstotliwości	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X[j(\omega - \omega_0)]$
Różniczkowanie oryginału	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(j\omega)$
Całkowanie oryginału	$\int_{-\infty}^t x(\zeta) d\zeta$	$\frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0) \delta(\omega)$
Skalowanie w czasie i częstotliwości (podobieństwo)	$x(at), a > 0$	$\frac{1}{a} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Splot	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) y(\tau) d\tau$	$X(j\omega) Y(j\omega)$
Wzór Parsevala	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) ^2 d\omega$	

Tabela 2.2. Wybrane pary transformat

Oryginał	Obraz
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
$x(t) = 1$	$2\pi \delta(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}$	$X(j\omega) = \begin{cases} \pi/\omega_0 & \text{dla } \omega < \omega_0, \\ 0 & \text{dla } \omega > \omega_0 \end{cases}$
$e^{-\omega_0^2 t^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{ \omega_0 } \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\omega_0^2}\right)$
$e^{- \omega_0 t }$	$\frac{2 \omega_0 }{\omega_0^2 + \omega^2}$

:: 2.4. Gęstość widmowa sygnału na wyjściu układu liniowego

Przedstawiając własności przekształcenia Fouriera, pokazano, że spłot dwóch sygnałów równy jest iloczynowi transformat Fouriera tych sygnałów. Korzystając z tej własności, możemy podać związek pomiędzy transformatą Fouriera $X(j\omega)$ sygnału na wejściu układu liniowego a transformatą Fouriera $Y(j\omega)$ sygnału wyjściowego. Dany jest on zależnością

$$Y(j\omega) = K(j\omega) X(j\omega), \quad (2.39)$$

gdzie $K(j\omega) = |K(j\omega)| e^{j\arg[K(j\omega)]}$ jest charakterystyką częstotliwościową obwodu. Związki pomiędzy gęstościami widmowymi amplitudy i fazy sygnału wejściowego i wyjściowego dane są wzorami

$$|Y(j\omega)| = |K(j\omega)| |X(j\omega)|, \quad (2.40a)$$

$$\arg[Y(j\omega)] = \arg[K(j\omega)] + \arg[X(j\omega)]. \quad (2.40b)$$

:: 2.5. Przykłady

Przykład 2.1

Znajdź transformatę Fouriera delty Diraca.

Rozwiązanie. Korzystając z definicji prostego przekształcenia Fouriera, otrzymujemy

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1. \quad \bullet$$

Przykład 2.2

Znajdź transformatę Fouriera sygnału jednostkowego

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } -\infty < t < 0, \\ 1, & \text{gdy } \infty > t > 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Niestety, w przypadku tej funkcji nie możemy skorzystać z twierdzenia o obrazie pochodnej, gdyż nie spełnia ona założeń. Wykorzystamy natomiast twierdzenie o obrazie całki. Skok jednostkowy może być przedstawiony jako całka z delty Diraca, tj. $\mathbf{1}(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\zeta) d\zeta$. W efekcie otrzymujemy

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega). \quad \bullet$$

Przykład 2.3

Znajdź oryginał $X(j\omega) = \delta(\omega)$.

Rozwiązanie. Korzystając z definicji odwrotnego przekształcenia Fouriera, otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}.$$

Dzięki temu wynikowi możemy zapisać, jak wygląda transformata Fouriera wartości stałej:

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi \delta(\omega). \quad \bullet$$

Przykład 2.4

Znajdź transformatę Fouriera sygnału okresowego $x(t)$ mającego rozwinięcie w wykładniczy szereg Fouriera.

Rozwiązanie. Sygnał $x(t)$ posiada rozwinięcie w szereg Fouriera, zatem

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}.$$

Znajdźmy transformatę Fouriera tego sygnału. Skorzystamy w tym przypadku z twierdzenia o przesunięciu obrazu³:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-jk\omega_0 t}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_0). \quad \bullet$$

³ Chodzi tu o przesunięcie obrazu funkcji w dziedzinie częstotliwości.

Przykład 2.5

Znajdź transformatę Fouriera funkcji $x(t) = \cos(\omega_0 t)$.

Rozwiązanie. Zapiszmy funkcję $x(t)$, korzystając ze wzorów Eulera:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}}{2}.$$

Korzystając teraz z twierdzenia o przesunięciu obrazu i wzoru na transformatę wartości stałej, otrzymujemy końcowy wzór:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \pi \delta(\omega + \omega_0) + \pi \delta(\omega - \omega_0).$$

W tym miejscu warto przeanalizować, jak wygląda gęstość widmowa funkcji typu $y(t) = x(t) \cos(\omega_0 t)$, w przypadku gdy znamy obraz funkcji $x(t)$. Łatwo pokazać, korzystając z twierdzenia o przesunięciu obrazu, że jeżeli

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega),$$

to

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{x(t)}{2} e^{-j\omega_0 t} + \frac{x(t)}{2} e^{j\omega_0 t}\right\} = \frac{1}{2} X[j(\omega + \omega_0)] + \frac{1}{2} X[j(\omega - \omega_0)].$$

Więcej informacji na ten temat można znaleźć w rozdziale poświęconym modulacji.

Przykład 2.6

Znajdź transformatę Fouriera funkcji $x(t) = \sin(\omega_0 t)$.

Rozwiązanie. Zapiszmy funkcję $x(t)$ w innej postaci:

$$x(t) = \sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}.$$

Korzystając teraz z twierdzenia o przesunięciu obrazu i wzoru na transformatę wartości stałej, otrzymujemy końcowy wzór:

$$\mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t)\} = \pi j \delta(\omega + \omega_0) - \pi j \delta(\omega - \omega_0).$$

Przykład 2.7

Znajdź oryginał dla $X(j\omega)$ danego wzorem

$$X(j\omega) = \frac{\pi}{\omega_0} [\mathbf{1}(\omega + \omega_0) - \mathbf{1}(\omega - \omega_0)].$$

Rozwiązanie. Korzystając z definicji odwrotnego przekształcenia Fouriera, otrzymujemy

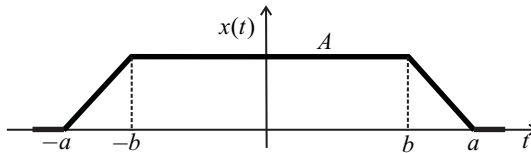
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{\pi e^{j\omega t}}{\omega_0} d\omega = \frac{1}{2j t \omega_0} e^{j\omega t} \Big|_{-\omega_0}^{\omega_0} = \frac{2j \sin(\omega_0 t)}{2j \omega_0 t} = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}.$$

Zatem

$$x(t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}.$$

Przykład 2.8

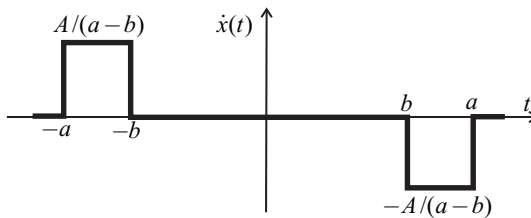
Znajdź transformatę Fouriera sygnału przedstawionego na rysunku 2.4.



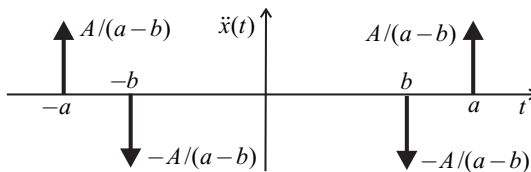
Rysunek 2.4. Sygnał $x(t)$ z przykładu 2.8

Rozwiązanie. Można oczywiście znaleźć obraz zadanej funkcji, korzystając ze wzoru definiującego to przekształcenie. Spróbujmy jednak ułatwić sobie trochę dojście do rozwiązania, wykorzystując twierdzenie o obrazie zróżniczkowanej funkcji. Zróżniczkujemy dwukrotnie funkcję $x(t)$. Zabieg ten został zilustrowany na rysunkach 2.5 i 2.6. Druga pochodna składa się z czterech impulsów Diraca. W prosty sposób możemy znaleźć obraz drugiej pochodnej.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\ddot{x}(t)\} &= \frac{A}{a-b} \mathcal{F}\{\delta(t+a) - \delta(t+b) - \delta(t-b) + \delta(t-a)\} \\ &= \frac{A}{a-b} (e^{j\omega a} - e^{j\omega b} - e^{-j\omega b} + e^{-j\omega a}) = \frac{A}{a-b} [\cos(\omega a) - \cos(\omega b)].\end{aligned}$$



Rysunek 2.5. Pierwsza pochodna sygnału $x(t)$ z przykładu 2.8



Rysunek 2.6. Druga pochodna sygnału $x(t)$ z przykładu 2.8

Pamiętając, że

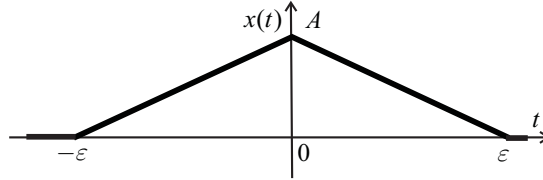
$$\mathcal{F}\{\ddot{x}(t)\} = (j\omega)^2 \mathcal{F}\{x(t)\},$$

otrzymujemy

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = -\frac{1}{\omega^2} \frac{A}{a-b} [\cos(\omega a) - \cos(\omega b)].$$

Przykład 2.9

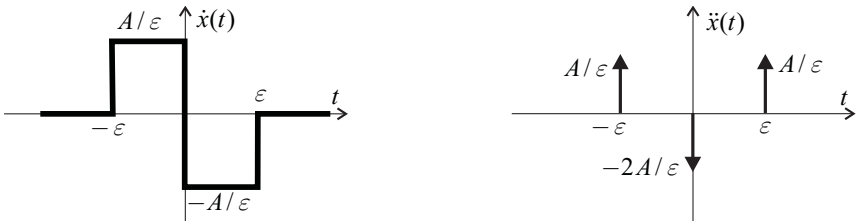
Znajdź transformatę Fouriera sygnału $x(t)$ przedstawionego na rysunku 2.7.



Rysunek 2.7. Sygnał $x(t)$ z przykładu 2.9

Rozwiązanie. Zróżniczkujmy dwukrotnie funkcję $x(t)$. Zabieg ten został zilustrowany na rysunku 2.8. Druga pochodna składa się z trzech impulsów Diraca. W prosty sposób możemy znaleźć obraz drugiej pochodnej:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\ddot{x}(t)\} &= \frac{A}{\varepsilon} \mathcal{F}\{\delta(t+\varepsilon) - 2\delta(t) + \delta(t-\varepsilon)\} \\ &= \frac{A}{\varepsilon} (e^{j\omega\varepsilon} - 2 + e^{-j\omega\varepsilon}) = \frac{2A}{\varepsilon} [\cos(\omega\varepsilon) - 1] = -\frac{4A}{\varepsilon} \sin^2\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right).\end{aligned}$$



Rysunek 2.8. Pierwsza i druga pochodna sygnału $x(t)$ z przykładu 2.9

Pamiętając, że

$$\mathcal{F}\{\ddot{x}(t)\} = (j\omega)^2 \mathcal{F}\{x(t)\},$$

otrzymujemy

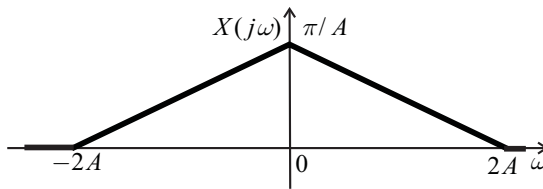
$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \left(-\frac{1}{\omega^2}\right) \left[-\frac{4A}{\varepsilon} \sin^2\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)\right] = \frac{4A}{\varepsilon\omega^2} \sin^2\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right).$$

Przykład 2.10

Oblicz oryginalny sygnał $x(t)$, którego widmo przedstawione jest na rysunku 2.9.

Rozwiązanie. Korzystając z definicji odwrotnego przekształcenia Fouriera, możemy zapisać

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2A}^0 \frac{\pi}{A} \frac{1}{2A} (2A + \omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2A} \frac{\pi}{A} \frac{1}{2A} (2A - \omega) e^{j\omega t} d\omega.\end{aligned}$$

Rysunek 2.9. Widmo sygnału $x(t)$ z przykładu 2.10

Obliczmy wartość pierwszej całki:

$$I_1 = \frac{1}{4A^2} \int_{-2A}^0 (2A + \omega) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{4A^2} \left\{ \left[\frac{2A}{jt} e^{j\omega t} \right]_{-2A}^0 + \left[\frac{\omega}{jt} e^{j\omega t} \right]_{-2A}^0 + \left[\frac{1}{t^2} e^{j\omega t} \right]_{-2A}^0 \right\} = \frac{1}{4A^2} \left[\frac{2A}{jt} + \frac{1}{t^2} (1 - e^{-j2At}) \right]$$

oraz drugiej:

$$I_2 = \frac{1}{4A^2} \int_0^{2A} (2A - \omega) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{4A^2} \left\{ \left[\frac{2A}{jt} e^{j\omega t} \right]_0^{2A} + \left[\frac{-\omega}{jt} e^{j\omega t} \right]_0^{2A} - \left[\frac{1}{t^2} e^{j\omega t} \right]_0^{2A} \right\} = \frac{1}{4A^2} \left[\frac{-2A}{jt} - \frac{1}{t^2} (e^{j2At} - 1) \right].$$

W efekcie otrzymujemy

$$x(t) = I_1 + I_2 = \frac{1}{4(At)^2} (1 - e^{-jAt} + 1 - e^{jAt}) = \frac{1}{2(At)^2} [1 - \cos(2At)] =$$

$$= \frac{1}{2(At)^2} [\sin^2(At) + \cos^2(At) - \cos^2(At) + \sin^2(At)].$$

Zatem

$$x(t) = \frac{\sin^2(At)}{(At)^2} = \left[\frac{\sin(At)}{At} \right]^2.$$

Przykład 2.11

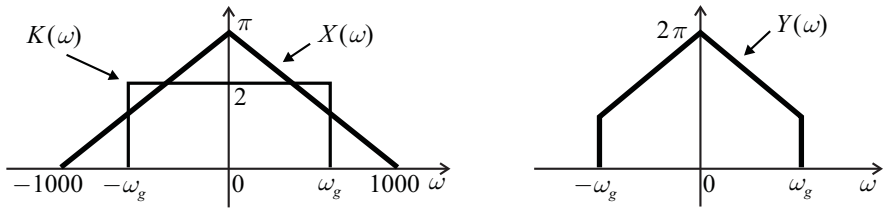
Określić pulsację graniczną idealnego filtra dolnoprzepustowego o wzmacnieniu w paśmie przepuszczania równym 2, jeżeli wiadomo, że po pobudzeniu sygnałem

$$x(t) = \frac{500 \sin^2(500t)}{(500t)^2}$$

energia sygnału na wejściu i wyjściu filtra jest taka sama.

Rozwiązanie. Na rysunku 2.10 przedstawiono gęstość widmową sygnału na wejściu filtra $X(\omega)$, wyjściu $Y(\omega)$ oraz charakterystykę częstotliwościową filtra $K(\omega)$. Obliczmy energię sygnału na wejściu filtra. Zgodnie ze wzorem Parsewala możemy zapisać

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega.$$



Rysunek 2.10. Gęstości widmowe $X(\omega)$ i $Y(\omega)$ oraz charakterystyka częstotliwościowa filtra $K(\omega)$

W naszym przypadku

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1000}^0 \left[\pi \left(1 + \frac{\omega}{1000} \right) \right]^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{1000} \left[\pi \left(1 - \frac{\omega}{1000} \right) \right]^2 d\omega = \\ &= \pi \int_{-1000}^0 \left(1 + \frac{\omega}{1000} \right)^2 d\omega = \pi \left[\omega + \frac{\omega^2}{10^3} + \frac{1}{3} \frac{\omega^3}{10^6} \right]_{-1000}^0 = \frac{\pi 10^3}{3}. \end{aligned}$$

Energia sygnału na wyjściu filtra dana jest wzorem

$$E_y = \frac{1}{2\pi} 2 \int_{-\omega_g}^0 \left[2\pi \left(1 + \frac{\omega}{1000} \right) \right]^2 d\omega = 4\pi \left[\omega + \frac{\omega^2}{10^3} + \frac{1}{3} \frac{\omega^3}{10^6} \right]_{-\omega_g}^0 = 4\pi \left(\omega_g - \frac{\omega_g^2}{10^3} + \frac{1}{3} \frac{\omega_g^3}{10^6} \right).$$

Zgodnie z warunkami zadania $E_x = E_y$, zatem

$$\omega_g - \frac{\omega_g^2}{10^3} + \frac{1}{3} \frac{\omega_g^3}{10^6} = \frac{1}{12} 10^3.$$

Rozwiązując to równanie, otrzymujemy

$$\omega_g \approx 91,4 \text{ rad/s.}$$

Przykład 2.12

Znajdź transformatę Fouriera sygnału

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0.$$

Rozwiązanie. Zgodnie z definicją prostego przekształcenia Fouriera możemy zapisać

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt.$$

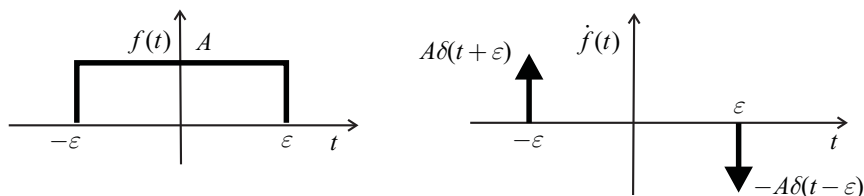
Zatem

$$X(j\omega) = \frac{1}{a-j\omega} e^{t(a-j\omega)} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{a+j\omega} e^{-t(a+j\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

Przykład 2.13

Wyznacz gęstość widmową impulsu prostokątnego przedstawionego na rysunku 2.11:

$$f(t) = A[\mathbf{1}(t + \varepsilon) - \mathbf{1}(t - \varepsilon)].$$



Rysunek 2.11. Sygnał $f(t)$ z przykładu 2.13 oraz jego pierwsza pochodna

Rozwiązanie. Korzystając z twierdzenia o transformacie funkcji przesuniętej w czasie, znajdujemy transformatę Fouriera $\hat{f}(t)$:

$$\mathcal{F}\{\hat{f}(t)\} = A[\mathcal{F}\{\delta(t+\varepsilon)\} - \mathcal{F}\{\delta(t-\varepsilon)\}] = A(e^{j\omega\varepsilon} - e^{-j\omega\varepsilon}).$$

Równocześnie na podstawie twierdzenia o transformacie pochodnej funkcji czasowej mamy

$$\mathcal{F}\{\hat{f}(t)\} = j\omega F(\omega).$$

Wobec tego

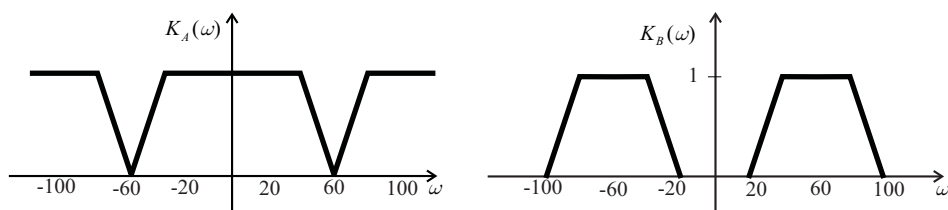
$$j\omega F(\omega) = A(e^{j\omega\varepsilon} - e^{-j\omega\varepsilon}).$$

W efekcie otrzymujemy

$$F(\omega) = \frac{2A(e^{j\omega\varepsilon} - e^{-j\omega\varepsilon})}{2j\omega} = \frac{2A}{\omega} \sin(\omega\varepsilon).$$

Przykład 2.14

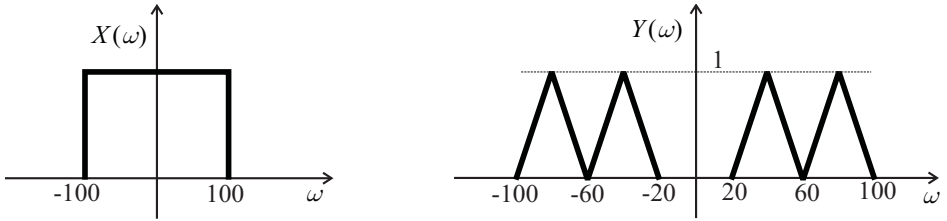
Sygnał $x(t) = (\pi t)^{-1} \sin(100t)$ podano na dwa połączone kaskadowo filtry, których charakterystyki amplitudowe przedstawiono na rysunku 2.12, przy czym filtry te nie obciążają się wzajemnie. Oblicz energię sygnału $y(t)$ na wyjściu układu.



Rysunek 2.12. Charakterystyki amplitudowe filtrów z przykładu 2.14

Rozwiązanie. Na rysunku 2.13 przedstawiono gęstości widmowe sygnałów na wejściu i wyjściu układu. Korzystając ze wzoru Parsewala oraz uwzględniając symetrię gęstości widmowej sygnału na wyjściu układu, możemy obliczyć szukaną energię:

$$E_y = 8 \frac{1}{2\pi} \int_{20}^{40} \left(\frac{\omega - 20}{20} \right)^2 d\omega = 8 \frac{1}{2\pi} \int_0^{20} \left(\frac{\omega}{20} \right)^2 d\omega = \frac{80}{3\pi}.$$



Rysunek 2.13. Gęstości widmowe sygnałów wejściowego i wyjściowego w przykładzie 2.14

Przykład 2.15

Sygnał

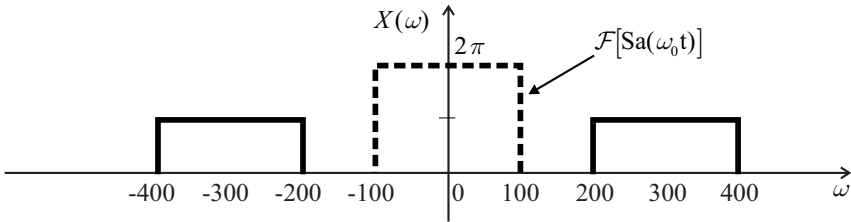
$$x(t) = A \cos(\Omega t) \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t},$$

gdzie $\Omega = 300 \text{ rad/s}$, $\omega = 100 \text{ rad/s}$, $A = 200$, podano na wejście idealnego filtra górno-przepustowego o wzmacnieniu w paśmie przepuszczania równym 2.

- Oblicz i narysuj gęstość widmową sygnału $x(t)$.
- Wyznacz pulsację graniczną filtra, jeżeli wiadomo, że energia sygnału $y(t)$ na wyjściu filtra stanowi 25% energii sygnału wejściowego.

Rozwiązanie. Gęstość widmową sygnału $x(t)$ przedstawiono na rysunku 2.14. Wyznaczono ją jako gęstość widmową sygnału $\cos(\Omega t)$, zmodulowanego sygnałem $\text{Sa}(\omega_0 t)^4$. Analitycznie może być ona zapisana w postaci

$$X(j\omega) = \pi[1(\omega + 400) - 1(\omega + 200) + 1(\omega - 200) - 1(\omega - 400)].$$



Rysunek 2.14. Gęstość widmowa sygnału $x(t)$ z przykładu 2.15

Energię sygnału $x(t)$, zgodnie ze wzorem Parsewała, możemy obliczyć:

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-400}^{-200} (\pi)^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{200}^{400} (\pi)^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{200}^{400} (\pi)^2 d\omega = 200\pi.$$

Natomiast energia sygnału $y(t)$ wynosi

$$E_y = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_g}^{400} (2\pi)^2 d\omega = 4\pi(400 - \omega_g).$$

⁴ $\text{Sa}(\omega_0 t) = (\omega_0 t)^{-1} \sin(\omega_0 t)$.

Zgodnie z warunkami zadania $E_y = 0,25E_x$, zatem

$$4\pi(400 - \omega_g) = 0,25 \cdot 200\pi$$

Rozwiązując to równanie, otrzymujemy

$$\omega_g = 387,5 \text{ rad/s}$$

❖ 2.6. Literatura

- [1] M. Krakowski, *Elektrotechnika teoretyczna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1991.
- [2] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1979.
- [3] A. V. Oppenheim, A. S. Willisky, *Signals & Systems*, Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, New Jersey 1997.
- [4] A. Wojnar, *Teoria sygnałów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1980.