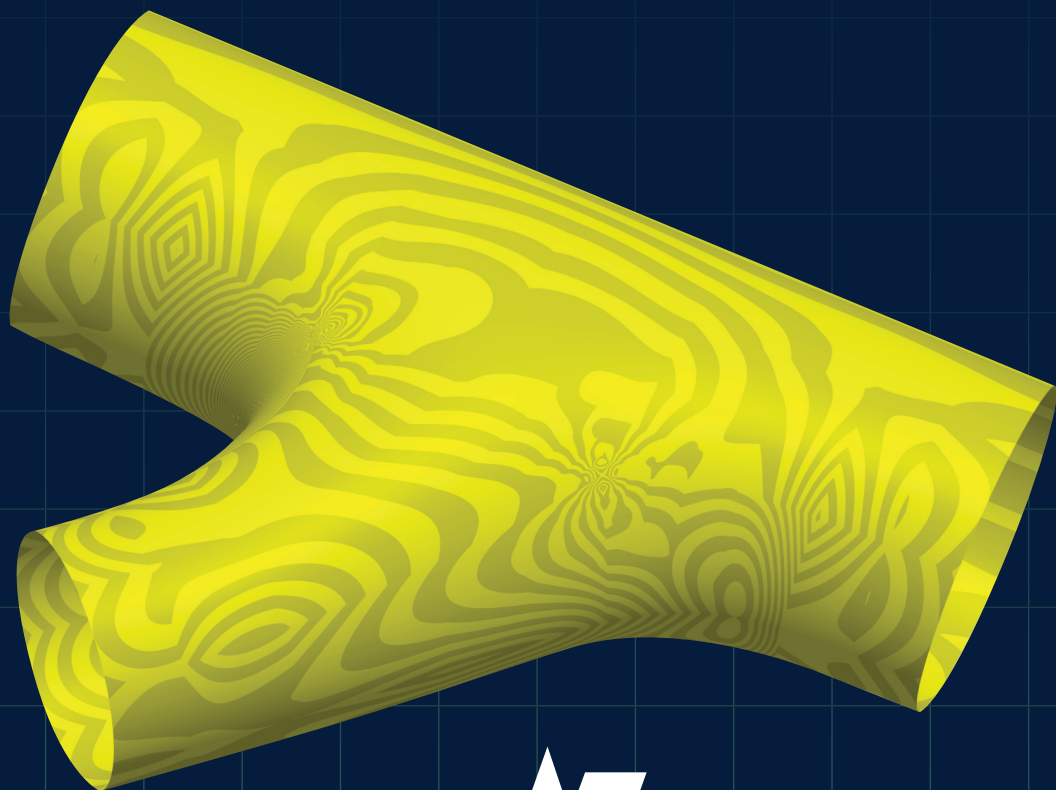


PRZEMYSŁAW KICIAK

WYDANIE
TRZECIE
ROZSZERZONE

PODSTAWY MODELOWANIA KRZYWYCH I POWIERZCHNI

zastosowania w grafice komputerowej



Wydawnictwo WNT

PODSTAWY MODELOWANIA KRZYWYCH I POWIERZCHNI

PRZEMYSŁAW KICIAK



PODSTAWY MODELOWANIA
KRZYWYCH I POWIERZCHNI

zastosowania w grafice komputerowej



Wydawnictwo WNT

Projekt okładki i stron tytułowych ANNA LUDWICKA
Wydawca EDYTA KAWALA
Redaktor prowadzący JOLANTA KOWALCZUK
Redaktor MARIA KASPERSKA
Skład systemem \TeX PRZEMYSŁAW KICIAK
Korekta ZESPÓŁ
Koordynator produkcji ANNA BĄCZKOWSKA

Recenzenci

prof. dr hab. inż. KRZYSZTOF MARCINIAK
prof. dr hab. ANDRZEJ MARCINIAK

Książka, którą nabyłeś, jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy, abyś przestrzegał praw, jakie im przysługują. Jej zawartość możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym. Ale nie publikuj jej w Internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. A kopiując jej część, rób to jedynie na użytek osobisty.

Szanujmy cudzą własność i prawo
Więcej na www.legalnakultura.pl
Polska Izba Książki

© Copyright by Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2000, 2005
© Copyright by Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2019

ISBN 978-83-01-20350-4

Wydanie III (I w WN PWN)
Warszawa 2019

Wydawnictwo Naukowe PWN
02-460 Warszawa, ul. Gottlieba Daimlera 2
tel. (0-22) 69 54 321, faks 22 69 54 288
infolinia 801 33 33 88
e-mail: pwn@pwn.com.pl, reklama@pwn.pl
www.pwn.pl

Druk i oprawa: OSDW Azymut Sp. z o.o.

Spis treści

Przedmowa	13
Przedmowa do wydania trzeciego	17
0. Wiadomości wstępne	19
0.1. Reprezentacje figur geometrycznych	19
0.2. Reprezentacje krzywych i powierzchni parametrycznych	20
0.3. Zadanie interpolacyjne Lagrange’a	24
0.3.1. Algorytm Aitkена	24
0.3.2. Własności wielomianowych krzywych interpolacyjnych	26
0.4. Obcinanie narożników	27
1. Krzywe Béziera	29
1.1. Algorytm de Casteljau	29
1.2. Wielomiany Bernsteina	30
1.3. Własności wielomianów Bernsteina	32
1.4. Podwyższenie stopnia	36
1.5. Blossoming	40
1.5.1. Formy biegunowe i diagonalne	40
1.5.2. Algorytm de Casteljau i podział krzywej	41
1.5.3. Formy biegunowe i podwyższenie stopnia	45
1.6. Pochodna krzywej Béziera	45
1.7. Pochodne wyższego rzędu	47
1.8. Łączenie krzywych Béziera	50
1.9. Uzupełnienia	51
1.9.1. Schemat Hornera w bazie wielomianów Bernsteina	51
1.9.2. Obniżenie stopnia krzywej	52
1.9.3. Formy biegunowe i pochodne	54
1.9.4. Krzywizna i skręcenie krzywej Béziera	57
1.9.5. Twierdzenie Menelaosa	60
1.9.6. Twierdzenie aproksymacyjne Weierstrassa	61

2. Wymierne krzywe Béziera	63
2.1. Krzywe jednorodne i wymierne	63
2.2. Jednorodne i wymierne krzywe Béziera	65
2.3. Kształtowanie wymiernych krzywych Béziera	68
2.4. Własności wymiernych krzywych Béziera	69
2.5. Podwyższenie i obniżenie stopnia	70
2.6. Reparametryzacja krzywej wymiernej	71
2.7. Pochodne krzywych wymiernych	72
2.8. Łączenie wymiernych krzywych Béziera	73
2.9. Uzupełnienia	74
2.9.1. Dwustosunek i zasadnicze twierdzenie geometrii rzutowej	74
2.9.2. Reprezentacja krzywej wymiernej przy użyciu punktów pomocniczych	75
2.9.3. Reprezentacja krzywych stożkowych	77
2.9.4. Obcinanie krzywych	79
2.9.5. Rzutowanie krzywych	82
2.9.6. Procedura rysowania krzywych	83
2.9.7. Formy biegunowe krzywych wymiernych	88
2.9.8. Krzywizna i skręcenie wymiernej krzywej Béziera	92
3. Trójkątne płaty Béziera	95
3.1. Określenie płata trójkątnego	95
3.2. Algorytm de Casteljau dla płatów trójkątnych	96
3.3. Podział płata trójkątnego i blossoming	98
3.4. Podwyższenie stopnia płata	100
3.5. Pochodne płatów trójkątnych	101
3.6. Łączenie płatów trójkątnych	104
3.7. Wymierne trójkątne płaty Béziera	105
3.8. Uzupełnienia	107
3.8.1. Szybkie obliczanie punktów płata trójkątnego	107
3.8.2. Formy biegunowe i krzywizny płata	108
3.8.3. Reparametryzacja płata wymiernego	111
3.8.4. Trójkąty na sferze	111
4. Tensorowe płaty Béziera	115
4.1. Określenie płata	115
4.2. Własności płatów wynikające z określenia tensorowego	116
4.2.1. Wyznaczanie punktów płata	117
4.2.2. Podwyższenie stopnia płata	119
4.2.3. Pochodne cząstkowe płatów Béziera	120
4.2.4. Podział płata Béziera	121
4.2.5. Zasady łączenia płatów Béziera z ciągłością C^k	123
4.3. Płaszczyzna styczna do płatów zdegenerowanych	124
4.4. Wymierne prostokątne płaty Béziera	125
4.4.1. Podstawowe własności płatów wymiernych	126

4.4.2.	Obliczanie pochodnych płata wymiernego	127
4.4.3.	Płaszczyzna styczna do płata wymiernego	128
4.5.	Uzupełnienia	130
4.5.1.	Przetwarzanie tablic punktów kontrolnych	130
4.5.2.	Znajdowanie tensorowej reprezentacji płatów trójkątnych	133
4.5.3.	Swobodna deformacja	137
4.5.4.	Śledzenie promieni	141
4.5.5.	Wyznaczanie punktów przecięcia krzywych	147
4.5.6.	Rozwiązywanie układów równań algebraicznych	148
4.5.7.	Wyznaczanie przecięć powierzchni	159
5.	Krzywe B-sklejane	173
5.1.	Konstrukcja gładko połączonych krzywych Béziera	175
5.2.	Zastosowanie różnic dzielonych	178
5.2.1.	Funkcje sklejące i baza obciętych potęg	178
5.2.2.	Określenie funkcji B-sklejanych	181
5.2.3.	Wzór Mansfielda–de Boora–Coxa	185
5.2.4.	Algorytm de Boora	186
5.2.5.	Własności funkcji i krzywych B-sklejanych	188
5.2.6.	Pochodne krzywej B-sklejanej	191
5.3.	Wstawianie węzłów	195
5.3.1.	Procedura wstawiania węzła	195
5.3.2.	Związek wstawiania węzła z algorytmem de Boora	199
5.3.3.	Zmiana bazy po wstawieniu węzła	200
5.3.4.	Usuwanie węzła	204
5.3.5.	Zastosowania procedury wstawiania węzła	205
5.4.	Blossoming	208
5.4.1.	Formy biegunowe funkcji i krzywych sklejących	208
5.4.2.	Ciągłość funkcji sklejących w węzłach	211
5.4.3.	Formy biegunowe i wstawianie węzłów	217
5.4.4.	Algorytm Oslo	217
5.4.5.	Zbieżność procesu wstawiania węzłów	222
5.4.6.	Podwyższenie stopnia	227
5.5.	Funkcje B-sklejane i sympleksy	228
5.5.1.	Funkcje miary przekroju	228
5.5.2.	Sympleksy i wielomiany Bernsteina	229
5.5.3.	Wielościąny, wielomiany i funkcje sklejące	231
5.5.4.	Sympleksowa definicja funkcji B-sklejanych	232
5.5.5.	Związek sympleksów z różnicami dzielonymi	233
5.5.6.	Całkowanie funkcji B-sklejanych	239
5.5.7.	Ciągłość funkcji sklejących w węzłach	239
5.5.8.	Rozkład jedyńki	240
5.5.9.	Własność minimalnego nośnika	241
5.5.10.	Wstawianie węzła	242
5.5.11.	Podwyższenie stopnia	244

5.5.12.	Sympleksowy dowód wzoru Mansfielda–de Boora–Coxa	246
5.6.	Krzywe B-sklejane z węzłami równoodległymi	250
5.7.	Wymierne krzywe B-sklejane (krzywe NURBS)	255
5.8.	Uzupełnienia	260
5.8.1.	Krzywe zamknięte	260
5.8.2.	Interpolacyjne krzywe B-sklejane trzeciego stopnia	261
5.8.3.	Twierdzenie Schoenberga–Whitney	264
5.8.4.	Aproksymacyjne krzywe B-sklejane	266
5.8.5.	Obliczanie długości krzywych	268
6.	Powierzchnie B-sklejane	271
6.1.	Określenie płata B-sklejanego	271
6.2.	Podstawowe własności płatów B-sklejanych	272
6.3.	Wymierne powierzchnie B-sklejane (powierzchnie NURBS)	274
6.4.	Przykłady konstrukcji płatów B-sklejanych	275
6.4.1.	Powierzchnie rozpinane	275
6.4.2.	Powierzchnie zakreslane	281
6.4.3.	Produkt sferyczny i powierzchnie obrotowe	284
6.5.	Powierzchnie reprezentowane przez siatki	286
6.5.1.	Płaty tensorowe z węzłami równoodległymi	286
6.5.2.	Siatki nieregularne	288
6.5.3.	Zagęszczanie siatek	289
6.5.4.	Elementy szczególnie w siatkach	291
6.5.5.	Powierzchnia graniczna	292
6.6.	Uzupełnienia	294
6.6.1.	Momenty i twierdzenia Guldina	294
6.6.2.	Powierzchnie prostokreślne i rozwijalne	298
7.	Krzywe i powierzchnie w reprezentacji Hermite’a	301
7.1.	Lokalne bazy Hermite’a	301
7.2.	Interpolacyjne krzywe sklejane trzeciego stopnia	303
7.2.1.	Związek reprezentacji Hermite’a i Béziera krzywych trzeciego stopnia	303
7.2.2.	Równania ciągłości pochodnej drugiego rzędu	304
7.2.3.	Warunki brzegowe	305
7.2.4.	Dobór węzłów dla krzywych interpolacyjnych	309
7.2.5.	Własność minimalnej energii	310
7.2.6.	Błąd aproksymacji dla interpolacyjnych funkcji sklejanych	312
7.3.	Płaty określone przez warunki interpolacyjne	317
7.3.1.	Płaty Coonsa	317
7.3.2.	Płaty bikubiczne w reprezentacji Hermite’a	322
7.3.3.	Konstrukcja powierzchni złożonych z płatów bikubicznych	324
7.3.4.	Płaty Gregory’ego	328
7.3.5.	Płaty Browna	331

8. Ciągłość geometryczna krzywych	333
8.1. Pojęcie ciągłości geometrycznej	333
8.1.1. Związek ciągłości parametryzacji z ciągłością geometryczną	334
8.1.2. Krzywe geometrycznie sklejące	335
8.2. Równania ciągłości geometrycznej krzywych	337
8.2.1. Wzór Fàa di Bruno	337
8.2.2. Łączenie zreparametryzowanych krzywych	338
8.3. Interpretacja ciągłości geometrycznej krzywych	342
8.4. Krzywe γ -sklejane	345
8.5. Krzywe β -sklejane	348
8.5.1. Definicja	349
8.5.2. Znajdowanie łuków wielomianowych krzywej β -sklejanej	350
8.5.3. Konstrukcja funkcji β -sklejanych	352
8.5.4. Istnienie i jednoznaczność funkcji β -sklejanych	358
8.5.5. Krzywe β -sklejane z globalnymi parametrami połączenia	360
8.5.6. Dalsze własności i przykłady	362
8.5.7. Wstawianie węzłów	365
8.6. Krzywe ν -sklejane	367
8.7. Tensorowe powierzchnie geometrycznie sklejące	369
9. Ciągłość geometryczna powierzchni	371
9.1. Równania ciągłości geometrycznej	371
9.1.1. Uogólniony wzór Fàa di Bruno	371
9.1.2. Równania ciągłości geometrycznej połączenia pary płatów	372
9.2. Interpretacja ciągłości geometrycznej powierzchni	375
9.3. Równania ciągłości dla płatów wielomianowych	377
9.3.1. Podstawy algebraiczne	377
9.3.2. Rozwiązania równań ciągłości	380
9.4. Konstrukcja pary gładko połączonych płatów	385
9.4.1. Konstrukcja pary płatów wielomianowych połączonych z ciągłością G^1	387
9.4.2. Konstrukcja pary płatów wielomianowych połączonych z ciągłością G^2	390
9.4.3. Konstrukcja pary gładko połączonych płatów wymiernych	391
9.5. Geometrycznie ciągłe powierzchnie wypełniające	394
9.5.1. Wypełnianie przerwy między płatami B-sklejany	394
9.5.2. Powierzchnie wypełniające dla płatów obciętych	399
9.6. Ciągłość geometryczna powierzchni granicznych	407
9.7. Warunki zgodności G^1 we wspólnym narożniku	411
9.7.1. Lokalne warunki zgodności G^1	412
9.7.2. Globalne warunki zgodności G^1	414
9.8. Warunki zgodności drugiego i wyższych rzędów	419
9.8.1. Lokalne warunki zgodności G^2	419
9.8.2. Funkcje sklejące dwóch zmiennych	422
9.8.3. Trygonometryczne funkcje sklejące	430

9.8.4.	Trygonometryczne funkcje sklejjane i warunki zgodności G^1	434
9.8.5.	Trygonometryczne funkcje sklejjane i warunki zgodności G^2	437
9.9.	Wypełnianie wielokątnych otworów	450
9.9.1.	Schemat Hahna	450
9.9.2.	Podstawy teoretyczne	452
9.9.3.	Konstrukcja przestrzeni klasy G^1 i G^2	456
9.9.4.	Minimalizacja form kwadratowych	473
9.9.5.	Optymalizacja kształtu	482
9.9.6.	Przykładowe wyniki	487
A.	Przegląd podstawowych pojęć algebry liniowej	491
A.1.	Przestrzenie liniowe	491
A.1.1.	Macierze	493
A.1.2.	Układy współrzędnych	494
A.1.3.	Przekształcenia liniowe	495
A.1.4.	Funkcjonały i przestrzeń sprzężona	496
A.1.5.	Normy	496
A.1.6.	Iloczyny skalarne	497
A.1.7.	Przekształcenia izometryczne	499
A.1.8.	Wyznaczniki	499
A.1.9.	Iloczyny wektorowe i zewnętrzne	501
A.1.10.	Interpretacja geometryczna funkcyjonału	503
A.1.11.	Układy równań liniowych	504
A.1.12.	Algebraiczne zagadnienia własne	508
A.2.	Przestrzenie afiniczne	509
A.2.1.	Współrzędne kartezjańskie i jednorodne	511
A.2.2.	Współrzędne barycentryczne	512
A.2.3.	Przekształcenia afiniczne	515
A.2.4.	Przekształcenia afiniczne przestrzeni trójwymiarowej	517
A.2.5.	Mierzenie zbiorów	524
B.	Działania na wielomianach w bazach Bernsteina	529
B.1.	Działania na wielomianach	529
B.1.1.	Mnożenie i dzielenie	529
B.1.2.	Mnożenie wielomianów wielu zmiennych	532
B.1.3.	Dodawanie i odejmowanie	532
B.1.4.	Algorytm Euklidesa	533
B.1.5.	Obliczanie iloczynu skalarnego	534
B.2.	Działania na funkcjach wektorowych	535
B.2.1.	Mnożenie wielomianu i krzywej	535
B.2.2.	Wyznaczanie płatów Béziera opisujących wektory normalne	537
B.3.	Działania na funkcjach sklejjanych	543
B.3.1.	Mnożenie funkcji sklejjanych	543
B.3.2.	Obliczanie iloczynu skalarnego	544

C. Elementy geometrii różniczkowej	545
C.1. Krzywizny krzywych	545
C.1.1. Parametryzacja łukowa	545
C.1.2. Równania Freneta	546
C.1.3. Krzywizna krzywej płaskiej	548
C.1.4. Krzywizny krzywej przestrzennej	549
C.2. Krzywizny powierzchni	550
C.2.1. Różniczki płata	550
C.2.2. Pierwsza i druga forma podstawowa	552
C.2.3. Krzywizna normalna powierzchni	554
C.2.4. Krzywizny i kierunki główne powierzchni	556
C.2.5. Klasyfikacja punktów powierzchni	557
D. Różnice dzielone	559
D.1. Schemat Hornera i bazy Newtona	560
D.2. Określenie i własności różnic dzielonych	562
D.3. Algorytm różnic dzielonych	565
D.4. Reszta interpolacyjna	567
D.5. Wzór Leibniza	568
D.6. Różnice dzielone, sympleksy i funkcje B-sklejane	569
E. Metody numeryczne	571
E.1. Arytmetyka zmiennopozycyjna	571
E.1.1. Uwagi o błędach reprezentacji i zaokrągleń	572
E.2. Rozwiązywanie równań liniowych	575
E.2.1. Układy z macierzą trójkątną	575
E.2.2. Eliminacja Gaussa	576
E.2.3. Inne metody	580
E.3. Rozwiązywanie liniowych zadań najmniejszych kwadratów	582
E.3.1. Zadania regularne	582
E.3.2. Zadania dualne	585
E.3.3. Zadania regularne z więzami	586
E.4. Rozwiązywanie równań nieliniowych	587
E.4.1. Metoda bisekcji	589
E.4.2. Metoda Newtona	591
E.4.3. Metoda Newtona dla układów równań	593
E.4.4. Metoda siecznych	596
E.4.5. Reguła fałsi i algorytm Illinois	597
E.5. Algebraiczne zagadnienie własne	601
E.6. Optymalizacja	602
E.6.1. Minimalizacja funkcji jednej zmiennej	602
E.6.2. Minimalizacja gładkiej funkcji wielu zmiennych	603

F. Wizualizacja kształtu powierzchni	605
F.1. Funkcje kształtu i ich warstwie	606
F.1.1. Własności warstw	606
F.1.2. Przekroje płaskie powierzchni	607
F.1.3. Lambertowskie odbicie światła i izofoty	608
F.1.4. Linie odbłasku	610
F.1.5. Krzywizny powierzchni	614
F.2. Krzywe charakterystyczne	615
F.2.1. Całkowanie krzywych charakterystycznych	615
F.2.2. Warstwie i linie najszybszego spadku funkcji kształtu	617
F.2.3. Linie krzywiznowe	619
Literatura	621
Skorowidz	637

*... wrócili mocno zadziwieni, Trurl bowiem nie
Doradcę budował, lecz wiele rozmaitych maszyn
kowalskich, ślusarskich i elektrykarskich;
następnie usiadł i na długiej taśmie papieru,
gwoździem czyniąc w niej otworki, sporządził
dokładny program Doradcy i poszedł na
przechadzkę, maszyny zaś tłukły się w baszcie do
późnej nocy, rano zaś Doradca był już gotów.*

STANISŁAW LEM: Cyberiada.

Przedmowa

Książka *Podstawy modelowania krzywych i powierzchni* jest adresowana do czterech grup Czytelników. Pierwsze dwie to programiści i użytkownicy systemów CAD/CAM, którzy znajdą tu teoretyczne podstawy działania swoich produktów i narzędzi pracy. Trzecia grupa to osoby czynnie zainteresowane grafiką komputerową, dla których w książce znalazły się przykładowe algorytmy związane z grafiką. Czwartą grupę stanowią studenci, dla których modelowanie może się stać świetną okazją do oswojenia się z wieloma pojęciami i faktami z algebry, geometrii, analizy i metod numerycznych.

Książka ta nie zawiera instrukcji obsługi żadnego pakietu oprogramowania ani systemu modelowania, ale można w niej znaleźć opisy własności krzywych i powierzchni pomocne w posługiwaniu się takimi systemami. Wśród osób zainteresowanych grafiką i modelowaniem są i takie, które po matematykę sięgają z pewną taką nieśmiałością, natomiast są lub chcą być dobrze obeznane z używanym przez siebie oprogramowaniem. Zachęcając również te osoby do lektury, chciałbym je uspokoić: naprawdę trudnej matematyki w tej książce nie ma, choć przyznaję, że w kilku miejscach rachunki są żmudne. W ostateczności dowody niektórych twierdzeń można potraktować (z zachowaniem wszelkich proporcji) jak opisy przyrody w najważniejszej lekturze szkolnej (ale nie dotyczy to studentów matematyki, ani, jak sądzę, polonistyki). W miarę pogłębiania praktycznych umiejętności modelowania nadejdzie ta chwila, w której poznanie jego matematycznych podstaw przyniesie nie tylko pożytek, ale i przyjemność (podobnie jak przeczytanie tych opisów przyrody).

Zainteresowanie i uwagi Czytelników skłoniły mnie do wprowadzenia wielu zmian w treści książki, która w pierwszym wydaniu zasłużyła na opinię trudnej. Jest tylko jeden sposób usunięcia takiej wady, mianowicie powiększyć ją i uczynić z niej zaletę. Dowiedziawszy się, czego zrozumienie sprawiało Czytelnikom najwięcej kłopotów, przedstawiłem niektóre wywody bardziej szczegółowo, inne uprościłem, a jeszcze inne staną się bardziej przejrzyste dzięki dodatkowym ilustracjom. Poprawiłem też *wszystkie znalezione* błędy i dodałem wiele nowych

wiadomości.

W pierwszej części książki, składającej się z ośmiu rozdziałów, są opisane krzywe i powierzchnie Béziera i B-sklejane oraz interpolacyjne krzywe sklejane i powierzchnie Coonsa, przy czym nacisk jest położony na praktyczne zastosowania teorii, a zwłaszcza na to, jak przekłada się ona na możliwości interakcyjnego kształtowania krzywych i powierzchni. Materiał przedstawiony w tej części jest rozszerzeniem wykładu z modelowania geometrycznego, który prowadziłem na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego. Oprócz stosunkowo prostych metod wyznaczania punktów krzywych i powierzchni, opisane są nieco bardziej skomplikowane procedury przetwarzania tych obiektów. Procedury takie mają zwykle wiele elementów, które można zaprogramować na różne sposoby, i od ich implementacji zależy poprawność całej procedury (na przykład gwarancja znalezienia wszystkich punktów przecięcia krzywych itp.). Przedstawione tu własności krzywych i powierzchni znajdują bezpośrednie zastosowanie w opracowaniu poprawnych procedur.

Druga część książki jest poświęcona pojęciu ciągłości geometrycznej krzywych i powierzchni. Pojęcie to ma podstawowe znaczenie dla konstrukcji obiektów o gładkim kształcie. Oprócz ogólnej, ale nieco abstrakcyjnej teorii, książka zawiera opis konkretnych konstrukcji, z zastosowaniem przedstawionych wcześniej reprezentacji krzywych i płatów powierzchni.

Ostatnia, trzecia część książki składa się z sześciu dodatków, w których zostały zebrane podstawowe wiadomości potrzebne do zrozumienia poszczególnych rozdziałów. Najważniejszy przedmiot matematyczny, potrzebny w prawie wszystkich rozważaniach w tej książce, to algebra liniowa. Wiadomości w dodatku A są jednak z konieczności skondensowane i warto poznać ten przedmiot dokładniej, z podręcznika. Tutaj chodziło przede wszystkim o zebranie terminologii i ustalenie oznaczeń stosowanych w książce. Pozostałe dodatki w zasadzie trzeba traktować podobnie. Na przykład, metody numeryczne opisane w dodatku E zostały wybrane arbitralnie; jest wiele metod, które warto znać, a o których nie napisałem. Natomiast dla każdego zadania, którego rozwiązanie jest potrzebne do wykonania dowolnej opisanej w książce konstrukcji krzywej lub powierzchni, Czytelnik znajdzie w tym dodatku opis co najmniej jednej metody odpowiedniej do rozwiązania tego zadania. Zajmując się metodami numerycznymi, nie można pominąć zagadnień związanych z błędami zaokrągleń, które mało kto lubi, bo są uciążliwe. Książka ta nie jest jednak podręcznikiem metod numerycznych i dlatego zamieszczone w niej wiadomości na ten temat sprowadzają się do paru uwag, które mają przypominać, że problem istnieje.

Materiał w tej książce jest przedstawiony w sposób dość ścisły i kompletny, choć nie zanadto sformalizowany. Z zasady, wiadomości łatwiejsze (zawarte w początkowych rozdziałach) są przedstawione bardziej szczegółowo i z mniejszymi

opuszczonymi fragmentami rachunków (od zasady tej zdarzają się wszakże wyjątki w wiadomościach uzupełniających na końcu niektórych rozdziałów). Warto potraktować takie opuszczenia jako okazje do poćwiczenia tych rachunków; można w ten sposób lepiej poznać własności krzywych i powierzchni i nabrać wprawy przydatnej podczas lektury trudniejszych rozdziałów.

Jednym z ważniejszych elementów książki są ilustracje. Gdyby (co wcale nie musi być prawdą) jeden obraz był wart tysiąca słów, to tekst tej książki, który w drugim wydaniu składa się z mniej niż ćwierci miliona słów, byłby wart mniej niż ponad 250 zamieszczonych w niej rysunków. Tekstu i rysunków nie da się jednak rozdzielić. Rysunki są ilustracjami do tekstu, a w kilku miejscach *zastępują* bardzo dokładny (i przez to ciężkostrawny) opis pewnego obiektu, zjawiska lub problemu. Oglądanie rysunków stanowi więc istotną część lektury. Nie sposób jednak narysować wszystkiego, co chciałoby się pokazać. Dlatego chciałbym namówić Czytelników do wykonywania rachunków połączonego z rysowaniem; zarówno ręcznie, jak i z pomocą komputera. Ze wszystkich znanych mi sposobów, aby wzory ożywić w wyobraźni, ten jest chyba najskuteczniejszy. Oglądając rysunki obiektów, łatwiej jest dojść do wprawy w interpretacji opisujących je wzorów i w wprowadzaniu nowych.

Podtrzymując wyrażoną w przedmowie pierwszego wydania opinię, że własnoręczne napisanie i uruchomienie implementacji algorytmu jest cennym ćwiczeniem, zdecydowałem się po zastanowieniu dołączyć do książki gotowe procedury. Są one napisane w języku C, realizują wiele algorytmów opisanych w tej książce (choć nie wszystkie) i w szczególności są rozwiązaniami wielu proponowanych ćwiczeń. W zamierzeniu mogą one być użyte w dowolnym programie. Obok tych procedur zamieściłem kilka programów, których głównym zadaniem jest pełnienie w tej książce roli ruchomych obrazków.

Każdy program wyświetlający grafikę, nawet tak prosty jak załączone programy demonstracyjne, musi być przygotowany do działania w określonym środowisku. Programy na krążku są przystosowane do systemu Linux/X Window, ale procedury przetwarzania krzywych i powierzchni są całkowicie niezależne od systemu. Dzięki temu kompilacja i uruchomienie tych procedur w byle jakim systemie powinny się udać bez żadnych zmian kodu źródłowego.

O zamieszczonym zbiorze procedur można zapewne powiedzieć wiele, ale nie to, że jest on kompletny. Rozpowszechnianie oprogramowania w tym stanie może budzić kontrowersje. Ponieważ jednak doprowadzenie go do stanu, który mógłbym uznać za ukończony, nie wydało mi się możliwe w żadnym przewidywalnym terminie, więc za decyzją o dołączeniu go do książki przeważyło przypuszczenie, że w dalszym jego rozwoju mogą wziąć udział Czytelnicy.

Dla ułatwienia lektury chciałbym jeszcze coś wyjaśnić. Używam pierwszej osoby wtedy, gdy wypowiadam się we własnym imieniu, na przykład zachęcam do

wykonania ćwiczenia. Pisząc „my”, mam na myśli siebie i Czytelnika, w którego imieniu pozwalam sobie napisać na przykład, że „możemy” coś zrobić. Forma bezosobowa oznacza, że rzecz jest ogólniejsza, a ponadto na przykład zwrotu „można zrobić” używam wtedy, gdy nie podałem wyjaśnienia, jak to zrobić, a czasem także gdy nie warto (mimo że można). Zobacz też przedmowę *Fizjologii smaku* Anthelme Brillat-Savarina, PIW, 1997.

W napisaniu książki takiej jak ta, zwykle oprócz autora ma udział wiele innych osób. Wszystkich tych, którzy coś wnieśli do treści i formy tej książki, nie jestem w stanie wymienić, choć wszystkim im chciałbym podziękować. Wymienię tylko kilkoro z nich. W pierwszym rzędzie Janinę i Michała Jankowskich, którzy „od zawsze” prowadzili na Uniwersytecie Warszawskim zajęcia z grafiki komputerowej i modelowania geometrycznego. Powstanie niniejszej książki jest jednym ze skutków tej Ich działalności. Profesor Maria Moszyńska swoimi wskazówkami pomogła mi uporządkować wiadomości z algebry i geometrii i zapobiegła ogłoszeniu drukiem niejednego głupstwa. Profesor Andrzej Kiełbasiński, którego pytałem o metody numeryczne, cierpliwie odpowiedział na wszystkie te pytania i każda Jego odpowiedź wiele mi wyjaśniła. Barbara Putz przeczytała kilka wersji brudnopisu obu wydań (znajdując dużo błędów) i przekonała mnie, że wielu Czytelników oprócz ogólnej teorii potrzebuje konkretnych przepisów. Mirek Nazaruk pomógł mi w kilku podstawowych sprawach, takich jak instalacja systemu Linux, w którym, z pomocą programu $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, wykonałem lwią część pracy nad książką. Sporo drobnych i dokuczliwych błędów wyskaki z notatek, z których powstała pierwsza jej część, studenci (kolejni studenci, niestety, znaleźli ich też trochę w pierwszym wydaniu). Dr Ahmed Zidna, na którego zaproszenie gościłem na Uniwersytecie w Metz, pomógł mi lepiej zrozumieć kilka istotnych problemów. W czasie pracy nad pierwszym wydaniem swoimi uwagami podzielił się ze mną dr Tadeusz Desperat. Wiele również dowiedziałem się od dra Jerzego Wojciechowskiego, któremu niestety nie będę już miał okazji pokazać tego wydania książki. Chciałbym też podziękować obu Recenzentom. Rozmowy z profesorem Krzysztofem Marciniakiem, który wcześniej był moim promotorem, pomogły mi zorientować się w oczekiwaniach potencjalnych Czytelników i zainspirowały do opracowania pewnych ważnych tematów. Uwagi w recenzji profesora Andrzeja Marciniaka pozwoliły mi w ostatniej chwili ulepszyć tekst i wprowadzić do niego wiele poprawek. Składam również podziękowanie Wydawnictwom Naukowo-Technicznym, które po raz drugi podjęły trud wydania tej książki. Niepośledni wpływ na jej powstanie i ostateczną postać wywarła także moja żona, Anna. Trudno przecenić Jej obecność, cierpliwość i niezależne spojrzenie.