

Bartłomiej Błaszczyszyn
Tomasz Rolski

Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie

Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie

Bartłomiej Błaszczyszyn
Tomasz Rolski

Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie

Opiniodawcy:

prof. dr hab. Bolesław Kacewicz

prof. dr hab. Łukasz Stettner

Redaktor: *Małgorzata Rajwacka-Jachymek*

Projekt okładki i stron tytułowych: *Anna Gogolewska*

Redaktor techniczny: *Barbara Chojnacka-Flisiuk*

Korekta: *Zespół*

Przygotowanie do druku: *preTEXt*

Wydawca: *Karol Zawadzki*

Książka, którą nabyłeś, jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy, abyś przestrzegał praw, jakie im przysługują. Jej zawartość możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym. Ale nie publikuj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. A kopiując jej część, rób to jedynie na użytek osobisty.

Szanujmy cudzą własność i prawo

Więcej na www.legalnakultura.pl

Polska Izba Książki

Copyright © by Wydawnictwo WNT

Warszawa 2004

Copyright © by Wydawnictwo Naukowe PWN SA

Warszawa 2018

ISBN 978-83-01-19756-8

Wydanie I – 1 dodruk (PWN)

Warszawa 2018

Wydawnictwo Naukowe PWN SA

02-460 Warszawa, ul. Gottlieba Daimlera 2

tel. 22 69 54 321, faks 22 69 54 288

infolinia 801 33 33 88

e-mail: pwn@pwn.com.pl; reklama@pwn.pl

www.pwn.pl

Druk i oprawa: OSDW Azymut Sp. z o.o.

Spis treści

Przedmowa	11
1. Wstęp	13
1.1. Wprowadzenie	13
1.1.1. Zarys historii teorii ubezpieczeń na życie	14
1.1.2. Regulacje prawne	16
1.2. Ogólne zasady tworzenia oznaczeń	16
1.3. Organizacja książki	17
1.4. Uwagi bibliograficzne	18
2. Elementy matematyki finansowej	21
2.1. Oprocentowanie składane i ciągłe	21
2.1.1. Wartość kapitału w czasie	21
2.1.2. Kapitalizacja odsetek w podokresach	23
2.1.3. Kapitalizacja ciągła	24
2.1.4. Procent z góry	28
2.2. Renty	30
2.2.1. Renty bezterminowe	30
2.2.2. Renty pewne	32
2.2.3. Renty odroczone	35
2.2.4. Renty ciągłe	35
2.3. Przepływ pieniądza	37
2.4. Uwagi dotyczące oznaczeń i bibliografii	40
2.5. Zadania do rozdziału 2	42

3. Tablice trwania życia	47
3.1. Przyszły czas życia	47
3.1.1. Prawdopodobieństwa śmierci i przeżycia	48
3.1.2. Natężenie zgonów	51
3.1.3. Obcięty i ułamkowy czas życia	52
3.2. Hipotezy agregacyjne	54
3.2.1. Przypadek jednorodnej populacji	54
3.2.2. Analityczne prawa śmiertelności	56
3.2.3. Hipoteza agregacji (HA)	58
3.3. Hipotezy interpolacyjne	61
3.3.1. Hipoteza jednostajności (HU)	62
3.3.2. Hipoteza przedziałami stałego natężenia zgonów (HCFM)	64
3.3.3. Hipoteza Balducciego (HB)	66
3.3.4. Uwagi o zgodności HJP z hipotezami interpolacyjnymi	68
3.3.5. Przykłady	69
3.4. Konstrukcja tablic trwania życia	72
3.4.1. Ogólna definicja tablicy	72
3.4.2. Tablice zagregowane	75
3.4.3. Przykłady obliczeń z tablicami zagregowanymi	76
3.4.4. Tablice selektywne	77
3.5. Uwagi dotyczące oznaczeń i bibliografii	82
3.6. Zadania do rozdziału 3	83
4. Ubezpieczenia na życie	89
4.1. Wprowadzenie	89
4.2. Ubezpieczenia płatne w chwili śmierci	93
4.2.1. Ubezpieczenie na całe życie	94
4.2.2. Ubezpieczenie terminowe	95
4.2.3. Czyste ubezpieczenie na dożycie	95
4.2.4. Ubezpieczenie na dożycie	96
4.2.5. Odroczone ubezpieczenie na całe życie	97
4.2.6. Zmienna funkcja korzyści	98
4.3. Ubezpieczenia płatne na koniec roku lub podokresu śmierci	100
4.3.1. Ubezpieczenie na całe życie	101
4.3.2. Ubezpieczenie terminowe	102
4.3.3. Czyste ubezpieczenie na dożycie	102
4.3.4. Ubezpieczenie na dożycie	103
4.3.5. Odroczone ubezpieczenie na całe życie	104
4.3.6. Ubezpieczenia o zmiennych sumach	104
4.3.7. Wypłaty na koniec m -tej części roku	105
4.4. Analiza przykładowych funduszy	107
4.5. Związki i wzory rekurencyjne	114
4.5.1. Związki między modelem ciągłym a dyskretnym	114

4.5.2. Zależności rekurencyjne	115
4.6. Funkcje komutacyjne	118
4.6.1. Funkcja D_x	119
4.6.2. Funkcje C_x i M_x	119
4.6.3. Przypadek selekcji	120
4.7. Uwagi dotyczące oznaczeń i bibliografii	122
4.8. Zadania do rozdziału 4	124
5. Renty życiowe	133
5.1. Wprowadzenie	134
5.2. Renty płatne w sposób ciągły	135
5.2.1. Renta na całe życie	135
5.2.2. Renta terminowa	136
5.2.3. Odroczone renta na całe życie	137
5.2.4. Odroczone renta terminowa	139
5.3. Renty na życie płatne dyskretnie	140
5.3.1. Renty na całe życie	141
5.3.2. Renty terminowe	143
5.3.3. Renty odroczone	144
5.3.4. Renty rosnące	146
5.3.5. Renty stałe, płatne częściej niż raz w roku	146
5.3.6. Renta zupełna i podzielna	148
5.4. Akumulacja aktuarialna	151
5.4.1. ${}_nE_x$ jako czynnik dyskonta aktuarialnego	151
5.4.2. Przykłady obliczeń z uwzględnieniem akumulacji aktuarialnej	152
5.4.3. Model ciągły	155
5.5. Funkcje komutacyjne	155
5.5.1. Funkcja N_x	156
5.5.2. Funkcja S_x	157
5.6. Tożsamości, związki rekurencyjne i przybliżenia	158
5.6.1. Interpretacje wybranych tożsamości	158
5.6.2. Zależności rekurencyjne	159
5.6.3. Aproksymacje składek rent m -krotnych	160
5.7. Uwagi dotyczące oznaczeń i bibliografii	164
5.8. Zadania do rozdziału 5	166
6. Składki i rezerwy netto	171
6.1. Wprowadzenie pojęć	171
6.1.1. Modele składek i umów	171
6.1.2. Równanie wartości dla składki netto	174
6.1.3. Rezerwa składki netto	176
6.2. Polisy całkowicie ciągle	184
6.2.1. Polisy o dodatniej rezerwie końcowej	184

6.2.2.	Polisy o zerowej rezerwie końcowej	186
6.2.3.	Polisy o zmiennej intensywności składki	187
6.2.4.	Składki i rezerwy netto dla wybranych polis	190
6.2.5.	Ogólny model ciągły	192
6.3.	Polisy całkowicie dyskretne	196
6.3.1.	Składki i rezerwy netto dla wybranych polis	198
6.3.2.	Ogólny model dyskretny	200
6.4.	Rezerwy w portfelu ubezpieczeń	204
6.4.1.	Ujęcie deterministyczne	204
6.4.2.	Rezerwa w rzeczywistym portfelu	209
6.4.3.	Twierdzenie Hattendorffa	212
6.5.	Modele mieszane	218
6.5.1.	Składki płatne m -krotnie w roku	219
6.5.2.	Składki podzielne i zupełne	221
6.5.3.	Rezerwy w podokresach roku	222
6.6.	Użycie funkcji komutacyjnych	226
6.7.	Uwagi dotyczące oznaczeń i bibliografii	228
6.8.	Zadania do rozdziału 6	229
7.	Składki i rezerwy w praktyce aktuarialnej	237
7.1.	Składka brutto	237
7.1.1.	Rodzaje kosztów	238
7.1.2.	Równanie wartości dla składki brutto	239
7.1.3.	Składka brutto w ogólnym modelu ciągłym	242
7.1.4.	Składka brutto w ogólnym modelu dyskretnym	244
7.2.	Rezerwa składki brutto	246
7.2.1.	Rezerwa składki brutto w modelu ciągłym	248
7.2.2.	Ogólny model dyskretny i rezerwy Zillmera	251
7.3.	Teoria składki	254
7.3.1.	Składka od ogólnego ryzyka	254
7.3.2.	Składka a teoria użyteczności	256
7.3.3.	Wypłacalność portfela	259
7.4.	Składniki pozakosztowe	261
7.4.1.	Inflacja	262
7.4.2.	Reasekuracja	263
7.5.	Margines wypłacalności	265
7.6.	Uwagi dotyczące oznaczeń i bibliografii	269
7.7.	Zadania do rozdziału 7	270
8.	Ubezpieczenia dla wielu osób	275
8.1.	Status grupy	275
8.1.1.	Prawdopodobieństwa statusów przeżyciowych	276
8.1.2.	Statusy łącznego życia i ostatniego przeżywającego	277

8.1.3. Ogólny symetryczny status	281
8.1.4. Status niesymetryczny, konwencje oznaczeń	283
8.2. Składki podstawowych umów	286
8.2.1. Składki dla statusu łącznego życia i ostatniego przeżywającego	288
8.2.2. Tożsamości dla statusów symetrycznych	290
8.2.3. Przykłady bardziej złożonych umów	293
8.3. Dowody twierdzeń	296
8.4. Uwagi dotyczące oznaczeń i bibliografii	300
8.5. Zadania do rozdziału 8	302
9. Ubezpieczenia wieloopcyjne	309
9.1. Podstawowe wielkości probabilistyczne	309
9.1.1. Czas i przyczyna wyjścia ze statusu	310
9.1.2. Wieloopcyjne tablice szkodowości	313
9.1.3. Hipotezy interpolacyjne	314
9.1.4. Stowarzyszony model jednoopcyjny	315
9.2. Przykłady ubezpieczeń wieloopcyjnych	318
9.3. Uwagi dotyczące oznaczeń i bibliografii	320
9.4. Zadania do rozdziału 9	321
DODATKI	
A. Odpowiedzi do zadań	327
B. Oznaczenia aktuarialne	341
C. Niektóre uregulowania prawne	349
C.1. Egzamin dla aktuarjuszy	349
C.2. Margines wypłacalności	354
D. Tablice	359
Literatura	381
Skorowidz	385

Przedmowa

W niniejszej książce przedstawiliśmy teorię ubezpieczeń na życie, wzbogaconą przykładami i zadaniami, należącą do klasycznego materiału matematyki aktuarialnej. Teoria ta powstała na gruncie najstarszych zastosowań matematyki, do jakich zalicza się zastosowania rachunku prawdopodobieństwa. W istocie nad zagadnieniami dotyczącymi ubezpieczeń pracowano znacznie wcześniej, niż został stworzony nowoczesny rachunek prawdopodobieństwa, i to właśnie prace z dziedziny ubezpieczeń na życie w znacznej mierze przyczyniły się do jego powstania.

Do opanowania większości materiału prezentowanego w niniejszym podręczniku wystarczy znajomość podstaw rachunku prawdopodobieństwa z elementami matematyki wyższej. Ze względu na to, że książka jest adresowana również do studentów matematyki, w niektórych miejscach odwołujemy się do teorii lub twierdzeń bardziej zaawansowanych. Jednakże zrozumienie tych odniesień nie jest konieczne do opanowania i korzystania z omawianych tutaj zagadnień.

Podręcznik ten powstał na podstawie opracowanych przez nas materiałów, które były wykorzystywane do kursowego wykładu z matematyki ubezpieczeń na życie, prowadzonego w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego w latach 1995–2002.

Składamy podziękowania Helenie Jasiulewicz, Rafałowi Kulikowi i Zbigniewowi Palmowskiemu za uważne przeczytanie maszynopisu i liczne uwagi do wcześniejszych jego wersji, a także Witoldowi Florczakowi za cenne konsultacje, dotyczące niektórych aktów prawnych związanych z ubezpieczeniami na życie. Wyrażamy także wdzięczność wielu naszym

studentom zainteresowanym problematyką ubezpieczeń na życie, a w szczególności magistrantom. Współpraca z nimi przyczyniła się do powstania ostatecznej wersji książki. Dziękujemy także wszystkim, którzy namówili nas do napisania niniejszego podręcznika oraz wspierali to niełatwe przedsięwzięcie.

Wrocław, wrzesień 2003

BARTŁOMIEJ BŁASZCZYSZYN
TOMASZ ROLSKI

1

Wstęp

1.1. WPROWADZENIE

Przedmiotem teorii ubezpieczeń na życie (ubezpieczeń życiowych) są kontrakty zapewniające pokrycie finansowych potrzeb wynikłych wskutek określonych zdarzeń w życiu człowieka, jak choroba, kalectwo, przekroczenie pewnego wieku, konieczność zaopatrzenia rentowego, a przede wszystkim śmierć. Podstawowy mechanizm tych kontraktów i ogólniej – wszystkich ubezpieczeń, polega na tym, że nieznanne z góry (losowe) indywidualne potrzeby każdego ubezpieczonego są zaspokajane ze wspólnego funduszu, który tworzy się z ustalonych (na zasadzie średnich przewidywań) składek płaconych przez wszystkich ubezpieczonych. Jest to więc pewnego rodzaju solidarność grupy ubezpieczonych, której podstawą funkcjonowania jest prawo wielkich liczb i którą niejako organizuje i nadzoruje ubezpieczyciel. Do analizy tych kontraktów ubezpieczeniowych stosuje się ogólne zasady rachunkowości, ale oczywiście w istotny sposób bierze się pod uwagę losowość określonych w umowie zdarzeń w życiu ubezpieczonego.

Teoria ubezpieczeń na życie była jedną z pierwszych rozwijanych gałęzi matematyki stosowanej. Studia nad metodami obliczeń wartości produktów ubezpieczeniowych przyczyniły się do rozwoju probabilistyki.

W praktyce zastosowania teorii są ograniczone przez regulacje prawne, jednak wyłożona w książce wiedza jest uniwersalna, podobnie jak inne działy matematyki. Jej opanowanie umożliwia swobodne poruszanie się w dziedzinie ubezpieczeń na życie, niezależnie od regulacji prawnych dotyczących działalności ubezpieczeniowej.

Chociaż teoria ubezpieczeń na życie już okrzepła, tak że nie można nawet dowolnie dobierać oznaczeń, to jednak można ją wyklądać w sposób bardziej lub mniej zmatematyzowany. Tutaj wybraliśmy pierwsze podejście, które naszym zdaniem jest wygodniejsze dla studentów z przygotowaniem matematycznym.

1.1.1. Zarys historii teorii ubezpieczeń na życie

Historycy doszukują się pierwszych ubezpieczeń życiowych w starożytnym Rzymie. W średniowieczu w wielu krajach europejskich zawierano transakcje kupna renty, polegającej na tym, że jedna strona otrzymując pewną sumę pieniędzy była zobowiązana wypłacać pewne kwoty albo przez pewien okres, albo wieczyście, bądź do chwili wykupu renty. Można taką transakcję uznać za pierwowzór dzisiejszej oprocentowanej lokaty kapitału. Znano też umowy, w których okres wypłat był związany z chwilą śmierci rentobiorcy i miały one charakter dzisiejszych ubezpieczeń na życie. Jednakże najwcześniejsza udokumentowana umowa ubezpieczenia na życie została zawarta 18 czerwca 1583 r. przez *Office of Insurance* w budynku *Royal Exchange* w Londynie. Ubezpieczonym był William Gybbons – obywatel Londynu. Suma ubezpieczenia wynosiła 382 funty 6 szylingów i 8 pensów, i miała być wypłacona w przypadku zgonu Williama Gybbonsa w ciągu 12 miesięcy od zawarcia umowy. Była to, w naszej terminologii, *polisa na ubezpieczenie terminowe*. Następnie, stopniowo rozwinęły się inne formy ubezpieczeń życiowych, początkowo w postaci rocznych umów, gdzie składka czasami była ustalana w ramach grup wiekowych, później – ubezpieczenia na dożycie, polisy na całe życie, renty rodzinne, wreszcie polisy związane z nabyciem domu. Niektóre z nich, jak np. czyste ubezpieczenie na dożycie, zanikły, inne funkcjonują do tej pory i cieszą się dużą popularnością.

Matematyka ubezpieczeń życiowych powstała w odpowiedzi na potrzeby racjonalnej wyceny rent. W wiekach XVII i XVIII pojawiły się pierwsze prace z rachunku prawdopodobieństwa oraz badania nad prawami śmiertelności. Pierwszą opublikowaną książką z rachunku prawdopodobieństwa był mały traktat *De Ratiociniis in Ludo Aleae* Christiaana Huygensa z 1657 r. Pięć lat później John Graunt opublikował *Natural and Political Observations upon the Bills of Mortality*, gdzie podał podstawy statystyki opisowej. Do grona badaczy, którzy przyczynili się w tamtym okresie do rozwoju rachunku prawdopodobieństwa, można zaliczyć brata Christiaana Huygensa – Lodewijka Huygensa oraz Jamesa Bernoulliego. Pierwsze badania dotyczące wyceny rent na życie pochodzą od Johana de Wittta, który w 1671 r. opublikował *Waerdye van Lyf-Renten Naer proportie van Los-Renten*.