

DO NOWEJ PODSTAWY
PROGRAMOWEJ

Klasa 2

ZBIÓR ZADAŃ dla szkół ponadgimnazjalnych

Matematyka

Europejczyka

Zakres podstawowy i **rozszerzony**



Zawiera CD

Katarzyna Nowoświat
Artur Nowoświat

 **Helion**
EDUKACJA

Wszelkie prawa zastrzeżone. Nieautoryzowane rozpowszechnianie całości lub fragmentu niniejszej publikacji w jakiegokolwiek postaci jest zabronione. Wykonywanie kopii metodą kserograficzną, fotograficzną, a także kopiowanie książki na nośniku filmowym, magnetycznym lub innym powoduje naruszenie praw autorskich niniejszej publikacji.

Wszystkie znaki występujące w tekście są zastrzeżonymi znakami firmowymi bądź towarowymi ich właścicieli.

Autorzy oraz Wydawnictwo HELION dołożyli wszelkich starań, by zawarte w tej książce informacje były kompletne i rzetelne. Nie biorą jednak żadnej odpowiedzialności ani za ich wykorzystanie, ani za związane z tym ewentualne naruszenie praw patentowych lub autorskich. Autorzy oraz Wydawnictwo HELION nie ponoszą również żadnej odpowiedzialności za ewentualne szkody wynikłe z wykorzystania informacji zawartych w książce.

Redaktor prowadzący: Joanna Zaręba

Projekt okładki: ULABUKA

Skład: Marcin Chłąd

Filmy na CD: Wiesław Ziaja

Fotografia na okładce została wykorzystana za zgodą Shutterstock.

Wydawnictwo HELION

ul. Kościuszki 1c, 44-100 GLIWICE

tel. 32 231 22 19, 32 230 98 63

e-mail: helion@helion.pl

WWW: <http://helion.pl> (księgarnia internetowa, katalog książek)

Drogi Czytelniku!

Jeżeli chcesz ocenić tę książkę, zajrzyj pod adres

<http://helion.pl/user/opinie?mezpg2>

Możesz tam wpisać swoje uwagi, spostrzeżenia, recenzję.

ISBN: 978-83-246-2408-9

Copyright © Helion 2013

Printed in Poland.

- [Kup książkę](#)
- [Poleć książkę](#)
- [Oceń książkę](#)

- [Księgarnia internetowa](#)
- [Lubię to! » Nasza społeczność](#)

Spis treści

Wstęp	5
1. Wielomiany	7
1.1. Postać ogólna wielomianu	7
*1.2. Działania w zbiorze wielomianów. Dzielenie wielomianu przez dwumian	8
1.3. Rozkład wielomianu na czynniki	10
1.4. Równania i nierówności wielomianowe	11
2. Wyrażenia wymierne	17
*2.1. Działania na wyrażeniach wymiernych	17
2.2. Proporcjonalność odwrotna	19
2.3. Równania i nierówności wymierne	20
3. Wykres i zastosowania funkcji wykładniczej i logarytmicznej ...	27
3.1. Funkcja wykładnicza i jej wykres	27
*3.2. Funkcja logarytmiczna i jej wykres	29
3.3. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna w modelach matematycznych	30
4. Funkcje trygonometryczne	37
4.1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym — powtórzenie wiadomości	37
4.2. Funkcje trygonometryczne kąta o mierze z przedziału $\langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$	39
*4.3. Miary kąta	40
*4.4. Funkcje trygonometryczne kątów płaskich	41
*4.5. Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej. Wzory redukcyjne	43
*4.6. Wykresy funkcji trygonometrycznych. Rozwiązywanie równań i nierówności trygonometrycznych	44
*4.7. Podstawowe tożsamości trygonometryczne	46
*4.8. Równania i nierówności trygonometryczne	48
5. Ciągi	53
5.1. Pojęcie ciągu liczbowego i ciągu zapisane rekurencyjnie	53
*5.2. Granice ciągów	55
5.3. Ciąg arytmetyczny i jego suma	56
5.4. Ciąg geometryczny i jego suma	59
*5.5. Szereg geometryczny zbieżny	61
6. Planimetria	65
6.1. Kąty w kole	65
6.2. Okręgi styczne i styczne do okręgów	66
6.3. Trójkąty i czworokąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu	69
*6.4. Twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów	71
*6.5. Jednokładność i podobieństwo	72

7. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. 79

7.1. Punkt i odcinek w układzie współrzędnych	79
*7.2. Wektory na płaszczyźnie	80
7.3. Prosta i wzajemne położenie prostych w układzie współrzędnych	82
*7.4. Własności prostych wyrażonych równaniami ogólnymi	84
*7.5. Interpretacja graficzna nierówności liniowych w układzie współrzędnych	86
*7.6. Okrąg i koło w układzie współrzędnych	87
7.7. Symetria osiowa i środkowa	90

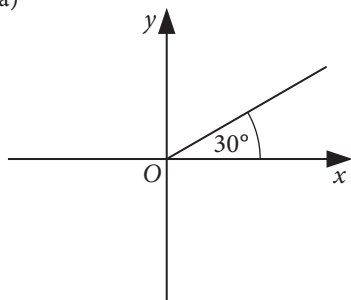
Odpowiedzi 95

1.1. Postać ogólna wielomianu	95
*1.2. Działania w zbiorze wielomianów. Dzielenie wielomianu przez dwumian	95
1.3. Rozkład wielomianu na czynniki	96
1.4. Równania i nierówności wielomianowe	97
*2.1. Działania na wyrażeniach wymiernych	98
2.2. Proporcjonalność odwrotna	98
2.3. Równania i nierówności wymierne	100
3.1. Funkcja wykładnicza i jej wykres	101
*3.2. Funkcja logarymiczna i jej wykres.	106
3.3. Funkcja wykładnicza i funkcja logarymiczna w modelach matematycznych.	110
4.1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym — powtórzenie wiadomości	111
4.2. Funkcje trygonometryczne kąta o mierze z przedziału $\langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$	112
*4.3. Miary kąta	113
*4.4. Funkcje trygonometryczne kątów płaskich	113
*4.5. Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej. Wzory redukcyjne	115
*4.6. Wykresy funkcji trygonometrycznych. Rozwiązywanie równań i nierówności trygonometrycznych	115
*4.7. Podstawowe tożsamości trygonometryczne	122
*4.8. Równania i nierówności trygonometryczne	122
5.1. Pojęcie ciągu liczbowego i ciągu zapisane rekurencyjnie	125
*5.2. Granice ciągów	125
5.3. Ciąg arytmetyczny i jego suma	126
5.4. Ciąg geometryczny i jego suma.	126
*5.5. Szereg geometryczny zbieżny	127
6.1. Kąty w kole.	127
6.2. Okręgi styczne i styczne do okręgów	127
6.3. Trójkąty i czworokąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu	128
*6.4. Twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów	128
*6.5. Jednokładność i podobieństwo	129
7.1. Punkt i odcinek w układzie współrzędnych	132
*7.2. Wektory na płaszczyźnie	133
7.3. Prosta i wzajemne położenie prostych w układzie współrzędnych	133
*7.4. Własności prostych wyrażonych równaniami ogólnymi	134
*7.5. Interpretacja graficzna nierówności liniowych w układzie współrzędnych	134
*7.6. Okrąg i koło w układzie współrzędnych	137
7.7. Symetria osiowa i środkowa	138

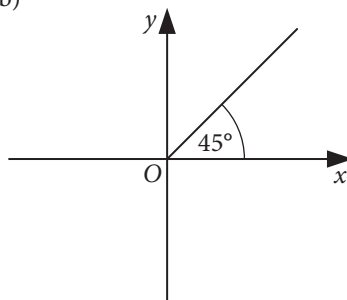
4.2. Funkcje trygonometryczne kąta o mierze z przedziału $\langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$

1 Podaj współrzędne czterech przykładowych punktów leżących na ramieniu końcowym kąta.

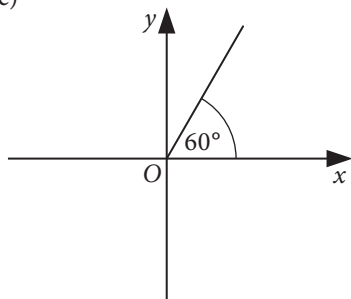
a)



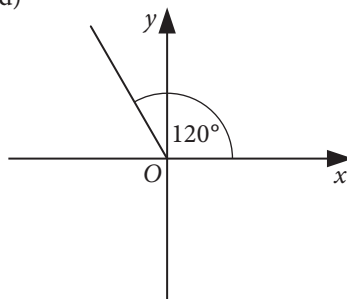
b)



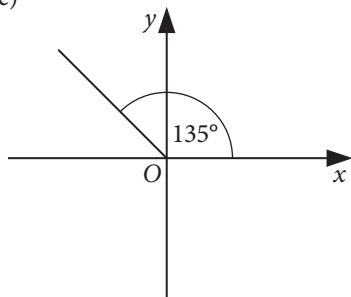
c)



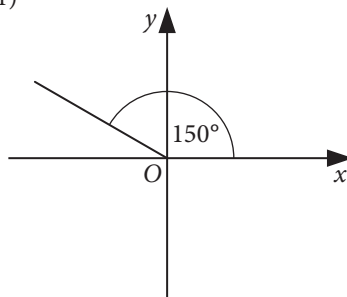
d)



e)



f)



2 Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α , wiedząc, że punkt P leży na końcowym jego ramieniu.

a) $P = (3, 1)$

b) $P = (3, 2)$

c) $P = (1, 10)$

d) $P = (-3, 1)$

e) $P = (-2, 5)$

f) $P = \left(-\frac{1}{2}, 5\right)$

3 Wykonaj odpowiedni rysunek i uzasadnij, że punkt P należy do ramienia końcowego kąta α . Korzystając ze współrzędnych punktu P , wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α .

a) $\alpha = 30^\circ$, $P = (4\sqrt{3}, 4)$

b) $\alpha = 150^\circ$, $P = (-4\sqrt{3}, 4)$

4 Korzystając z tablic matematycznych, oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów:

a) 100°

b) 110°

c) 115°

d) 170°

e) 178°

5 Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, wiedząc, że $\sin \alpha = \frac{1}{10}$ i $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

6 Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, wiedząc, że $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ i $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

7 Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = -2$ i $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

8 Oblicz pole trójkąta o długościach boków 5 cm i 8 cm i kącie między nimi 120° .

9 Oblicz pole trójkąta równoramiennego, którego kąt przy podstawie ma miarę 15° , a długość ramienia wynosi 4 cm.

*4.3. Miary kąta

1 Jaką miarę łukową mają poniższe kąty o mierze stopniowej? Podaj wartość dokładną i wartość przybliżoną.

36° , 100° , -150° , 1000° , $0,43^\circ$, $32^\circ 39'$, $57^\circ 20'$, $-88^\circ 55'$

2 Jaką w przybliżeniu miarę stopniową mają poniższe kąty o mierze łukowej?

$\frac{\pi}{7}$; $-\frac{3}{5}\pi$; 2 rad; $-9,42$ rad; 0,3229 rad; 1,405 rad; $-1,0462$ rad

3 Co jest większe:

- a) $\sin \frac{\pi}{6}$ czy $\sin 1$? b) $\cos 0,3$ czy $\cos \frac{\pi}{3}$? c) $\operatorname{tg} 1$ czy $\operatorname{tg} 1^\circ$?
d) $\sin 3$ czy $\sin 4$? e) $\cos \frac{3}{2}\pi$ czy $\cos 6$?

4 Przedstaw poniższe kąty w postaci ułamka dziesiętnego.

- a) $5^\circ 10'$ b) $10^\circ 25'$ c) $10^\circ 39' 17''$ d) $143^\circ 7' 2''$

5 Przedstaw poniższe kąty w postaci stopni, minut i sekund.

- a) $210,78^\circ$ b) $15,45^\circ$ c) $30,81^\circ$ d) $110,5^\circ$

6 Oblicz wartość wyrażeń:

- a) $m \sin 90^\circ - n \cos \frac{3}{2}\pi - \operatorname{tg} 2\pi + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}$ b) $\sin \frac{3}{2}\pi + \cos 180^\circ + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3}$
c) $m \sin \pi - 3 \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ d) $2 \sin \frac{\pi}{3} - 5 \cos 90^\circ + 4 \cos \frac{\pi}{4} - 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$

7 Znajdź wartość wyrażeń:

- a) $\sin^3 \left(\pi \cos^2 \frac{\pi}{4} \right)$ b) $\operatorname{tg}^3 \left(3\pi \sin^2 \frac{\pi}{6} \right)$

8 Długość promienia okręgu wynosi 36 cm. Oblicz długość łuku, na którym opiera się kąt środkowy o mierze:

- a) 3 radiany b) 150°

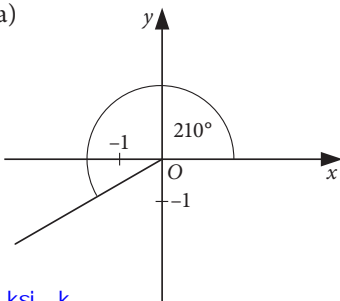
9 W okręgu o promieniu 5 cm dany jest kąt środkowy o mierze 30° . Oblicz długość łuku, na którym opiera się ten kąt.

10 W okręgu o promieniu 10 cm dany jest kąt środkowy o mierze $\frac{\pi}{10}$ radiana. Oblicz długość łuku, na którym opiera się ten kąt.

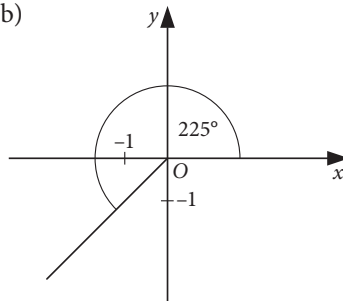
*4.4. Funkcje trygonometryczne kątów płaskich

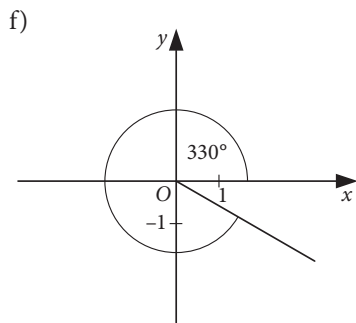
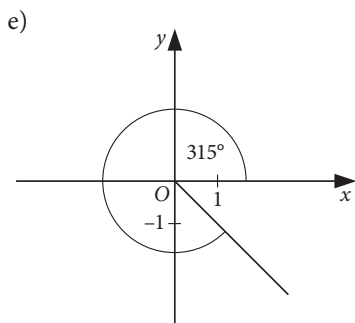
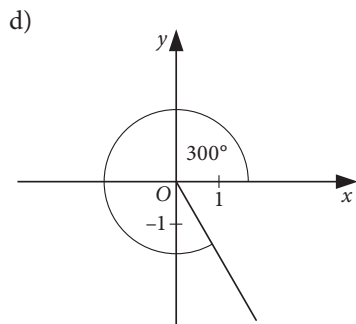
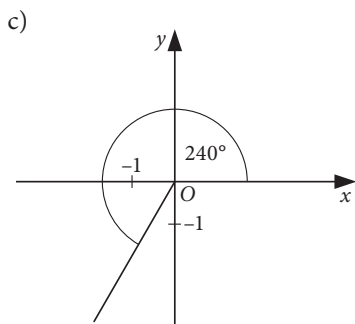
1 Podaj współrzędne trzech przykładowych punktów leżących na ramieniu końcowym kąta.

a)



b)





2 Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych, wiedząc, że punkt P leży na ramieniu końcowym kąta α .

- a) $P = (-3, -1)$ b) $P = (-3, -2)$ c) $P = (-1, -10)$
 d) $P = (3, -1)$ e) $P = (2, -5)$ f) $P = \left(\frac{1}{2}, -5\right)$

3 Wykonaj odpowiedni rysunek i uzasadnij, że punkt P należy do ramienia końcowego kąta α . Korzystając ze współrzędnych punktu P , wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α .

- a) $\alpha = 210^\circ$, $P = (-4\sqrt{3}, -4)$ b) $\alpha = 330^\circ$, $P = (4\sqrt{3}, -4)$

4 Która wartość funkcji jest dodatnia, a która ujemna?

- a) $\sin \frac{15}{4}\pi$ b) $\cos 2$ c) $\operatorname{tg} \frac{10}{3}\pi$

5 Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, wiedząc, że:

- a) $\sin \alpha = 0,96$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ b) $\sin \alpha = -0,3$, $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$
 c) $\cos \varphi = -\frac{1}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ d) $\operatorname{tg} \beta = 4,95$, $\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$

6 Napisz, w której ćwiartce układu współrzędnych położone jest ramię końcowe kąta α , jeżeli:

- a) $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$ b) $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$ c) $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$
d) $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$ e) $\sin \alpha > 0$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$ f) $\sin \alpha > 0$, $\operatorname{tg} \alpha < 0$
g) $\sin \alpha < 0$, $\operatorname{tg} \alpha < 0$ h) $\sin \alpha < 0$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$ i) $\cos \alpha > 0$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$
j) $\cos \alpha > 0$, $\operatorname{tg} \alpha < 0$ k) $\cos \alpha < 0$, $\operatorname{tg} \alpha < 0$ l) $\cos \alpha < 0$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$

7 Określ znak wyrażeń:

- a) $\sin 200^\circ \cdot \cos 220^\circ$ b) $\sin 300^\circ \cdot \cos 220^\circ$
c) $\sin 215^\circ \cdot \operatorname{tg} 347^\circ$ d) $\sin 318^\circ \cdot \operatorname{tg} 215^\circ \cdot \cos 358^\circ$

8 Określ ćwiartkę, w której leży końcowe ramię kąta α , jeżeli:

- a) $|\sin \alpha| = -\sin \alpha$ b) $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$ c) $|\sin \alpha| = \sin \alpha$

9 Wyznacz wartość wyrażenia $\frac{1 + \cos \alpha + \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$, jeśli $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ i $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$.

*4.5. Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej. Wzory redukcyjne

1 Wyznacz wartości:

- a) $\sin 750^\circ$ b) $\sin 780^\circ$ c) $\sin(-330^\circ)$ d) $\operatorname{tg}(-315^\circ)$

2 Wyznacz wartości:

- a) $\cos 120^\circ$, $\sin(-120^\circ)$, $\operatorname{tg}(-135^\circ)$ b) $\sin 210^\circ$, $\cos(-225^\circ)$, $\operatorname{tg} 240^\circ$
c) $\sin 300^\circ$, $\cos 330^\circ$, $\operatorname{tg}(-330^\circ)$

3 Oblicz wartości:

- a) $\sin \frac{35\pi}{2}$ b) $\cos\left(-\frac{7\pi}{2}\right)$ c) $\cos\left(\frac{27\pi}{4}\right)$ d) $\operatorname{tg}\left(-\frac{23\pi}{3}\right)$

4 Oblicz wartości:

- a) $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$ b) $\cos\left(\frac{17\pi}{6}\right)$ c) $\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$
d) $\sin\left(-\frac{19\pi}{2}\right)$ e) $\cos(5\pi)$ f) $\sin\left(\frac{23\pi}{3}\right)$

5 Oblicz wartość wyrażeń:

a) $\frac{\sin 4\pi - \sin \frac{5\pi}{2} + \cos 3\pi}{\cos 8\pi}$ b) $\left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^{\cos \pi} + (\cos 2\pi)^{\sin 1,5\pi}$

c) $\frac{\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(-x)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos x + \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$



6 Uprość wyrażenie:

$$\frac{a^4 \cos 2\pi - 4a^3 b \sin \frac{3}{2}\pi + 6a^2 b^2 \cos 0 - 4ab^3 \cos \pi + b^4 \sin \frac{\pi}{2}}{a^3 \sin \frac{5\pi}{2} + 3a^2 b \sin \frac{9\pi}{2} - 3ab^2 \cos \pi - b^3 \cos 15\pi}$$

7 Zredukuj do pierwszej ćwiartki następujące wartości funkcji:

- a) $\sin 140^\circ$ b) $\cos 113^\circ$ c) $\operatorname{tg} 164^\circ$
d) $\sin(-250^\circ)$ e) $\sin 1000^\circ$

8 Oblicz wartość wyrażeń:

- a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \sin 3\alpha \cdot \cos 3\alpha$ dla $\alpha = 45^\circ$
b) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \sin 3\alpha \cdot \cos 3\alpha$ dla $\alpha = 30^\circ$

9 Ile wynosi iloczyn tangensów obu kątów ostrych w dowolnym trójkącie prostokątnym?

*4.6. Wykresy funkcji trygonometrycznych. Rozwiązywanie równań i nierówności trygonometrycznych

1 Przekształcając wykres odpowiedniej funkcji, naszkicuj wykres funkcji $f(x)$:

- a) $f(x) = -\cos x$ b) $f(x) = 2 - \cos x$ c) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
d) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ e) $f(x) = \operatorname{tg}(-x)$ f) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
g) $f(x) = 3\sin x$ h) $f(x) = \sqrt{2}\sin x$ i) $f(x) = \sin \frac{1}{2}x$

2 Korzystając z wykresu funkcji $y = \sin x$, naszkicuj wykres funkcji:

- a) $y = -\sin x$ dla $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$ b) $y = 1 - \sin x$ dla $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$
c) $y = |\sin x|$ dla $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$ d) $y = \sin|x|$ dla $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$



3 Narysuj odpowiedni fragment wykresu funkcji $y = \sin x$.

- a) $-360^\circ < x < 0^\circ$ b) $720^\circ \leq x \leq 1080^\circ$ c) $540^\circ < x < 900^\circ$

4 Narysuj odpowiedni fragment wykresu funkcji $y = \cos x$.

- a) $-180^\circ \leq x \leq 360^\circ$ b) $180^\circ \leq x \leq 540^\circ$ c) $360^\circ \leq x \leq 450^\circ$

5 Narysuj odpowiedni fragment wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} x$.

- a) $-180^\circ \leq x \leq -90^\circ$ b) $270^\circ \leq x \leq 360^\circ$ c) $360^\circ \leq x \leq 720^\circ$

6 Używając tablic matematycznych dostępnych dla maturzystów i własności funkcji trygonometrycznych, rozwiąż równania:

a) $\sin x = 0,7071$ b) $\sin x = 0,9976$ c) $\cos x = 0,3256$

d) $\cos x = 0,9816$ e) $\operatorname{tg} x = 0,3443$ f) $\operatorname{tg} x = 8,1443$

g) $\sin x = -0,5736$ h) $\cos x = -0,0872$ i) $\operatorname{tg} x = -0,9004$

7 Rozwiąż równania w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos x = -\frac{1}{2}$ c) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

8 Używając tablic matematycznych dostępnych dla maturzystów i wykresów funkcji trygonometrycznych, znajdź rozwiązania równań należące do przedziału $\langle 0, 360^\circ \rangle$:

a) $\sin x = 0,0349$ b) $\sin x = -0,6018$ c) $\cos x = -0,9945$ d) $\operatorname{tg} x = -6,3138$

9 Rozwiąż równania:

a) $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin\left(\frac{2}{5}x\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ d) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$

e) $\sin\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = 1$ f) $\cos\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}$ g) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 1$ h) $\operatorname{tg} 2x = -1$

i) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{3}$ j) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ k) $\cos 5x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ l) $\operatorname{tg}(-x + \pi) = -\sqrt{3}$

10 Rozwiąż równania w przedziale $(0, 2\pi)$:

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin 3x = \frac{1}{2}$ c) $\cos\left(\frac{x}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ e) $\sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\cos\left(3x + \frac{4\pi}{15}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

11 Rozwiąż nierówności:

a) $\cos x < -0,5$ b) $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\cos x > -1$ d) $\sin x \leq 1$

e) $\operatorname{tg} x < 1$ f) $-\sqrt{3} \leq \operatorname{tg} x \leq 1$ g) $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

12 Rozwiąż nierówności:

a) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sin\left(4x - \frac{5\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{2}$ c) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{12}\right) < -\frac{1}{2}$
d) $\sin\left(12x + \frac{\pi}{2}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\operatorname{tg}\left(7x - \frac{2\pi}{3}\right) < -\sqrt{3}$ f) $\operatorname{tg}(\pi - 2x) > \frac{\sqrt{3}}{3}$

13 Wykaż, że równanie $\sin x + \cos x = 2$ jest sprzeczne.

14 Wykaż, że równanie $\sin x - \cos x = p$, gdzie $p \in \mathbb{R}$, ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $|p| \leq \sqrt{2}$.

15 Wykaż, że nierówność $\sin x \cdot \cos x > \frac{1}{4}$ nigdy nie zachodzi.

*4.7. Podstawowe tożsamości trygonometryczne

1 Oblicz bez użycia tablic matematycznych i kalkulatora wartość wyrażen:

a) $\cos 105^\circ + \cos 75^\circ$ b) $\sin \frac{11\pi}{12} + \sin \frac{5\pi}{12}$ c) $\cos \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12}$
d) $\cos 15^\circ - \sin 15^\circ$ e) $\operatorname{tg} 22^\circ 30' + \operatorname{tg} 67^\circ 30'$ f) $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{12} - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}$

2 Oblicz wartość wyrażenia $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$, jeśli $\sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

3 Oblicz wartości wyrażen:

a) $\cos(30^\circ + \alpha)$, jeśli $\cos \alpha = -0,75$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$
b) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$, jeśli $\sin \alpha = -0,6$ i $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$
c) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, jeśli $\cos \alpha = -0,8$ i $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$

4 Przedstaw w postaci iloczynu wyrażenia:

a) $\frac{1}{2} + \cos x$ b) $1 - \sin x$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin x$

5 Wiedząc, że $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ i $\sin \beta = \frac{2}{3}$ oraz $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ i $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, oblicz wartości wyrażen:

a) $\sin(\alpha + \beta)$ b) $\cos(\alpha + \beta)$ c) $\sin(\alpha - \beta)$ d) $\cos(\alpha - \beta)$

6 Wiedząc, że $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ i $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{4}$ oraz $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ i $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, oblicz wartości wyrażen:

a) $\sin(\alpha + \beta)$ b) $\sin(\alpha - \beta)$ c) $\cos(\alpha + \beta)$ d) $\cos(\alpha - \beta)$

7 Wyznacz wartość wyrażenia $\frac{1 - 4 \sin 10^\circ \sin 70^\circ}{2 \sin 10^\circ}$.



8 Doprowadź do postaci $y = A \sin(Bx + \alpha)$ oraz $y = C \cos(Dx + \beta)$ funkcje:

a) $y = \cos \pi x - \sin \pi x$ b) $y = \sin \frac{\pi}{2} x - \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{2} x$ c) $y = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x$

d) $y = \sqrt{3} \cos 4x - \sin 4x$ e) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin x - \cos x)$ f) $y = \sin x + \cos x$

9 Kąt α jest taki, że $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{4}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $|\cos \alpha - \sin \alpha|$.

10 Wykaż równości:

a) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$ b) $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ = 4$

c) $\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ = \frac{1}{2}$

11 Wykaż, że jeśli α i β są kątami ostrymi, to $\sin(\alpha + \beta) < \sin \alpha + \sin \beta$.

12 Udowodnij równość $\cos \frac{180^\circ}{5} \cdot \cos \frac{360^\circ}{5} = \frac{1}{4}$.

13 Uprość wyrażenia:

a) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin \alpha}$ b) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$ c) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$ d) $\frac{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}$

14 Wiedząc, że $\sin x = m$, oblicz $\cos 2x$.

15 Wykaż równość $\frac{1 + 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x}{\cos 2x + \sin 2x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

16 Wykaż prawdziwość poniższych wzorów dla tych argumentów, dla których występujące w nich wyrażenia mają sens.

a) $\sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$ b) $\cos^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$ c) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$

17 Wykaż prawdziwość poniższych wzorów dla tych argumentów, dla których występujące w nich wyrażenia mają sens.

a) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$ b) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ c) $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha (3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$

18 Wykaż prawdziwość poniższych wzorów dla tych argumentów, dla których występujące w nich wyrażenia mają sens.

a) $\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$ b) $\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$ c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$

19 Wykaż prawdziwość poniższych wzorów dla tych argumentów, dla których występujące w nich wyrażenia mają sens.

a) $\sin 3\alpha = \sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha)$ b) $\cos 3\alpha = \cos \alpha (4 \cos^2 \alpha - 3)$

20 Wykaż równość $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = 3$.

Wskazówka

Skorzystaj z tego, że

$$40^\circ = 60^\circ - 20^\circ, \quad 80^\circ = 60^\circ + 20^\circ.$$

21 Wykaż nierówność $\sin 36^\circ \cdot \sin 54^\circ < \frac{5(\sqrt{5}-1)}{4\pi}$.

Wskazówka

$$\text{Zachodzą równości } \sin^2 72^\circ = \cos^2 18^\circ = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}.$$

22 Wykaż, że jeśli $\operatorname{tg} \alpha = n \operatorname{tg} \beta$, gdzie $n > 0$, to $\operatorname{tg}^2(\alpha - \beta) \leq \frac{(n-1)^2}{4n}$.

23 Wykaż, że $\frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} > 0$ dla wszystkich α należących do dziedziny nierówności.

*4.8. Równania i nierówności trygonometryczne

1 Rozwiąż równania:

a) $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$ b) $\sin 2x = 2 \sin^2 x$ c) $|\sin x| - |\cos x| = 0$ d) $\sin^2 x = \sqrt{3} \sin x \cos x$

2 Rozwiąż równanie $\cos(\cos x) = \frac{1}{2}$.

3 Rozwiąż równanie $\sin(\pi \cos x) = 0$.

4 Wykaż, że poniższe równania nie mają rozwiązań.

a) $\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = 0$ b) $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x} = 0$

5 Rozwiąż równania:

a) $\cos 2x + 2 = 3 \cos x$

b) $(\cos x + \sin x)(1 - \sin x) = \cos 2x$

c) $2 \sin x \cos^2 x = \cos x$

d) $\operatorname{tg} x - \sin x = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos x}$

e) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}$

f) $\frac{1 - \cos 2x}{2 \sin x} = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$

g) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = 2 - \sqrt{3}$

h) $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \cos x \operatorname{tg} x = 0$

i) $\sin 2x + \sin x + \cos 2x + \cos x + 1 = 0$

6 Rozwiąż równania:

a) $\cos \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{3}$

b) $\cos \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) = \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$

c) $\cos \left(2x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$

7 Rozwiąż równania:

a) $\sin 3x = \sin x$

b) $\cos 3x = \cos x$

c) $\cos x \cdot \operatorname{tg} 3x = 0$

d) $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x} = 0$

e) $\sin x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}$

f) $\sin 3x - \sin 2x - \sin x = 0$

8 Rozwiąż równania:

a) $\operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x$

b) $\operatorname{tg}^2 x - (\sqrt{3} + 1) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$

c) $\operatorname{tg} 2x = 3 \operatorname{tg} x$

d) $\frac{3 \sin x}{1 - \cos x} = \sqrt{3}$

e) $\sin x + \cos x + 2 \sin x \cos x = 1$

9 Rozwiąż równanie $2 \sin^2 x - 2 \sin^2 x \cos x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

10 Rozwiąż nierówność $\sin^2 x < 1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

11 Rozwiąż nierówności:

a) $\sin x \cdot \cos x < 0$

b) $\sin x \cdot \cos x \geq 1$

c) $\sin x \geq \cos x$

12 Rozwiąż nierówność $1 - \cos x < \operatorname{tg} x - \sin x$ dla $0^\circ < x < 360^\circ$.

13 Rozwiąż nierówność $\frac{\cos 2x}{\cos x} < 1$ dla $x \in (0, \pi)$.

14 Rozwiąż nierówność $\frac{\cos x - \pi}{\cos(x - \pi)} < 0$.

15 Rozwiąż nierówności:

a) $\sin 2x < \sin x$

b) $|\sin x| + \cos x > 0$

c) $3 \operatorname{tg}^2 x - 1 \geq 0$

16 Udowodnij nierówność $\sin(\alpha + \beta + \gamma) < \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$, jeśli $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$, $0^\circ < \gamma < 90^\circ$.

17 Dla jakich wartości parametru m równanie $\sin \alpha = \frac{m^2 - 1}{m^2 + \frac{1}{2}}$ ma rozwiązania?

18 Dla jakich wartości parametru a równanie $\sin x = \frac{a - 3}{2 - a}$ ma rozwiązania?

19 Wyznacz $\sin 2x$ z równania $\sin x + \cos x = m$.

20 W układzie współrzędnych zaznacz zbiory punktów, których współrzędne spełniają równania:

a) $\sin(x - y) = 0$ b) $\cos(2x + 2y) = 1$



Zadania testowe

1 Miara łukowa kąta $\alpha = 220^\circ$ wynosi:

A. $\frac{9\pi}{11}$ B. $\frac{11}{9}$ C. $\frac{11\pi}{9}$ D. π

2 Miara stopniowa kąta $\frac{2\pi}{3}$ wynosi:

A. 100° B. 120° C. 140° D. 160°

3 Ramię końcowe kąta α przechodzi przez punkt $(-2, 1)$. Ile jest równy $\cos \alpha$?

A. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

4 Kąt α jest kątem ostrym i $\cos \alpha = \frac{3}{4}$. Wartość wyrażenia $1 - \sin^2 \alpha$ jest równa:

A. $\frac{7}{16}$ B. $-\frac{7}{16}$ C. $-\frac{9}{16}$ D. $\frac{9}{16}$

5 Jeżeli $\sin \alpha = 0,8$ oraz $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, to:

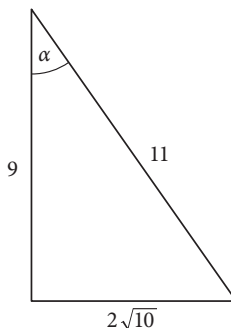
A. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ B. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$ C. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$ D. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$

6 Kąt α jest kątem ostrym i $\sin \alpha = \frac{7}{13}$. Wtedy $\operatorname{tg} \alpha$ jest równy:

A. $\frac{7}{6}$ B. $\frac{7 \cdot 13}{120}$ C. $\frac{7}{2\sqrt{30}}$ D. $\frac{7}{26\sqrt{30}}$

7 W trójkącie prostokątnym dane są długości boków (zobacz rysunek). Wtedy:

- A. $\cos \alpha = \frac{9}{11}$ B. $\sin \alpha = \frac{9}{11}$
 C. $\sin \alpha = \frac{11}{2\sqrt{10}}$ D. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{11}$



8 Kąt α jest kątem ostrym i $\operatorname{tg} \alpha = 1$. Wówczas:

- A. $\alpha < 30^\circ$ B. $\alpha = 30^\circ$ C. $\alpha = 45^\circ$ D. $\alpha > 45^\circ$

9 Liczba $\operatorname{tg} 30^\circ - \sin 30^\circ$ jest równa:

- A. $\sqrt{3} - 1$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{3} - 1}{6}$ D. $\frac{2\sqrt{3} - 3}{6}$

10 W trójkącie prostokątnym ABC odcinek AB jest przeciwprostokątną i $|AB| = 13$ oraz $|BC| = 12$. Wówczas sinus kąta ABC jest równy:

- A. $\frac{12}{13}$ B. $\frac{5}{13}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{13}{12}$

11 Wartość wyrażenia $\frac{\sin^2 38^\circ + \cos^2 38^\circ - 1}{\sin^2 52^\circ + \cos^2 52^\circ + 1}$ jest równa:

- A. $\frac{1}{2}$ B. 0 C. $-\frac{1}{2}$ D. 1

12 Jeżeli α, β, γ są kątami wewnętrznymi trójkąta, to:

- A. $\cos(\alpha + \beta) = \sin \gamma$ B. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma$
 C. $\sin(\alpha + \beta) = \cos \gamma$ D. $\cos(\alpha + \beta) = \cos \gamma$

13 Liczba rozwiązań równania $|\sin x| - \cos x = -1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ jest równa:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

14 Równanie $\sin x = \cos x$ ma w przedziale $(-\pi, \pi)$:

- A. 0 rozwiązań. B. 1 rozwiązanie. C. 2 rozwiązania.
 D. nieskończenie wiele rozwiązań.

15 Równanie $\sin x + \cos x = a$ ma rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy:

- A. $a \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$ B. $a \in \langle -1, 1 \rangle$ C. $a \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$ D. $a \in (-1, 1)$

16 Zbiór wartości funkcji $f(x) = \sin x - \cos x$ jest równy:

- A. $(-2, 2)$ B. $\langle -2, 2 \rangle$ C. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ D. $\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$

17 Dane są następujące stwierdzenia:

1. $\sin x < \sin^2 x$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$

2. $\sin x > \sin^2 x$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$

3. $\sin x < \sin^2 x$ dla $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

4. $\sin x > \sin^2 x$ dla $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

Prawdziwe są:

A. pierwsze i trzecie. B. pierwsze i czwarte. C. drugie i trzecie. D. drugie i czwarte.

18 Dane jest wyrażenie $\frac{\sin x}{\cos^2 x \sqrt{1 + \sin^2 x}}$. Stosując podstawienie $t = \sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}$,

otrzymasz wyrażenie jako funkcję zmiennej t w postaci:

A. $y = \frac{4t^2(1-t^2)}{(1+t^2)(t^4-6t^2+1)}$

B. $y = \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)(t^4-6t^2+1)}$

C. $y = \frac{(t^2-1)}{(1+t^2)(t^4-6t^2+1)}$

D. $y = \frac{4t^2(t^2-1)}{(1+t^2)(t^4-6t^2+1)}$

19 Wartość wyrażenia $x = \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 30^\circ + \dots + \cos 180^\circ$ jest równa:

A. -1

B. 0

C. 1.

D. 2

20 Prawdziwa jest równość:

A. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^2 x + \cos^2 x$

B. $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$

C. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$

D. $\sin^4 x + \cos^4 x = -1$

PROGRAM PARTNERSKI

GRUPY WYDAWNICZEJ HELION



- 1. ZAREJESTRUJ SIĘ**
- 2. PREZENTUJ KSIĄŻKI**
- 3. ZBIERAJ PROWIZJĘ**

Zmień swoją stronę WWW
w działający bankomat!

Dowiedz się więcej i dołącz już dzisiaj!

<http://program-partnerski.helion.pl>

GRUPA WYDAWNICZA

 **Helion SA**

Dobre wyniki z matematyki!

Matematyka daje niesamowite możliwości. W tym roku nauczysz się rozkładać wielomiany na czynniki, dojdiesz do granicy ciągu i wykonasz działania na wyrażeniach wymiernych. Ponadto poznasz funkcje i ich różne praktyczne zastosowania! A kiedy zaczniesz wreszcie obliczać kąty w kole, będzie to oznaczało tylko jedno: czas na planimetrię!

Matematyka Europejczyka. Zbiór zadań dla szkół ponadgimnazjalnych. Zakres podstawowy i rozszerzony. Klasa 2 pozwoli Ci poznać kolejne z wielkich tajemnic matematyki. Dzięki zadaniom zawartym w tej książce zarówno wielomiany, jak i wyrażenia wymierne czy funkcje trygonometryczne przestaną być dla Ciebie problemem, a wykonywanie niezbędnych ćwiczeń z geometrii i układów współrzędnych zacznie wręcz sprawiać Ci przyjemność. Książka zawiera także zadania testowe, stanowiące świetną rozgrzewkę przed egzaminem maturalnym.

Kompletny zestaw **Matematyka Europejczyka. Klasa 2** to **podręcznik + zbiór zadań + płyta CD.**

Do zestawu została dołączona płyta CD zawierająca rewolucyjny materiał w postaci filmowych wykładów, w trakcie których rozwiązanie zadania jest równoległe przedstawiane na tablicy. Doskonale sprawdzi się na zajęciach multimedialnych oraz podczas samodzielnej pracy w domu.



Seria podręczników, zbiorów zadań i płyt CD **Matematyka Europejczyka** wydawnictwa Helion pozwala uczniom zdobywać wiedzę bez stresu, a nauczycielom ułatwia przekazywanie nowego materiału w interesujący i niebanalny sposób.

Matematyka Europejczyka – TO SIĘ LICZY!

<http://edukacja.helion.pl>

Nr katalogowy: 5223



Księgarnia internetowa
<http://helion.pl>



Zamówienia telefoniczne:
0 801 339900



0 601 339900



Sprawdź najnowsze promocje:
• <http://helion.pl/promocje>
Książki najchętniej czytane:
• <http://helion.pl/bestsellery>
Zamów informacje o nowościach:
• <http://helion.pl/nowosci>

Helion SA
ul. Kościuszki 1c, 44-100 Gliwice
tel.: 32 230 98 63
e-mail: helion@helion.pl
<http://helion.pl>

helion.pl
księgarnia
internetowa

ISBN 978-83-246-2408-9



9 788324 624089

Informatyka w najlepszym wydaniu