DO NOWEJ PODSTAWY PROGRAMOWEJ

Klasa 2

PORADNIK METODYCZNY dla nauczycieli matematyki w szkołach ponadgminazjalnych

Matematyka Europejczyka

Zakres podstawowy i **rozszerzony**

Katarzyna Nowoświat, Artur Nowoświat

Helion EDUKACJA

Redaktor prowadzący: Joanna Zaręba
Projekt okładki: ULABUKA

Wydawnictwo HELION
ul. Kościuszki 1c, 44-100 GLIWICE
tel. 32 231 22 19, 32 230 98 63
e-mail: helion@helion.pl
WWW: http://helion.pl (księgarnia internetowa, katalog książek)

Drogi Czytelniku!
Jeżeli chcesz ocenić tę książkę, zajrzyj pod adres
http://helion.pl/user/opinie?mepms2
Możesz tam wpisać swoje uwagi, spostrzeżenia, recenzję.

ISBN: 978-83-246-2409-6

Printed in Poland

Spis treści

Rozdział 8.
NAUCZANIE PROBLEMOWE

W tym rozdziale zaproponowano takie sposoby przedstawiania problemów, aby uczeń sam doszedł do ich rozwiązania. Zostanie też zaprezentowane, jak stawiając odpowiednie zadanie, sprawić, żeby uczeń sformułował twierdzenie bądź jego dowód.

Nauczanie problemowe:

1. Stworzenie sytuacji problemowej i jej analiza.
2. Sformułowanie problemu, który powinien być rozwiązany.
3. Formułowanie hipotez będących próbami wyjaśnienia podstawowego problemu.
4. Weryfikacja problemów w celu wyeliminowania najmniej prawdopodobnych sytuacji.
5. Sformułowanie wniosków i uogólnień.

Poniżej przedstawiamy przykładowe tematy lekcji wraz z omówieniem ich realizacji za pomocą nauczania problemowego.

Temat lekcji: Przekształcanie wykresu funkcji względem osi układu współrzędnych.

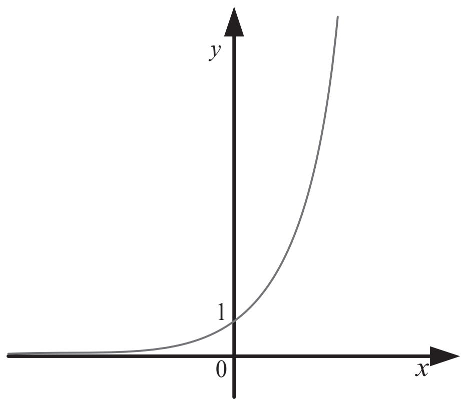
Niezbędne przybory:

- zeszyt,
- linijka,
- ołówek,
- kolorowy mazak,
- lusterko.

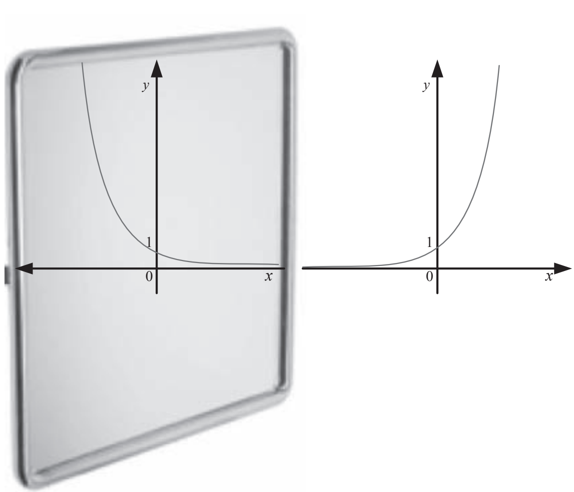
Przykład przeprowadzenia zasadniczej części lekcji

Nauczyciel rysuje na tablicy wykres funkcji wykładniczej i prosi uczniów o przerysowanie go do zeszytów (podręcznik *Matematyka Europejczyka*, s. 71, przykład 2.):

Układ współrzędnych narysuj ołówkiem, krzywą będącą wykresem funkcji — kolorowym flamastrem.



Następnie prosi uczniów o przyłożenie z lewej strony wykresu lusterka, tak aby krawędź lusterka była ułożona równolegle do osi *Oy*, tak jak na rysunku poniżej.



Nauczyciel rozpoczyna dyskusję:

Co możemy powiedzieć na temat odbicia? Względem jakiej osi jest to odbicie?

Następnie na podstawie tego przykładu uczniowie stwierdzają, że obraz w lusterku jest symetryczny do wykresu danej funkcji względem osi *Oy* oraz można zauważyć, że: $f(x) = f(-x)$, gdzie $f(x)$ jest danym wykresem funkcji, a wykres $f(-x)$ jest wykresem widzianym w lusterku.

Następnie nauczyciel porównuje wykres w lusterku z wykresem z przykładu 3. ze strony 72 podręcznika oraz określa wnioski dotyczące funkcji wykładniczej (zob. dół strony 72 z podręcznika).

Temat lekcji: Funkcja wykładnicza jako model w zadaniach praktycznych.

Przykład przeprowadzenia zasadniczej części lekcji

Nauczyciel czyta zadanie i omawia jego treść (na podstawie ciekawostki ze strony 73 podręcznika):

Stwierdzono, że masa izotopu węgla ^{14}C w znalezionej przez archeologów łyżce wynosi 78,5% masy wyjściowej. Sprzed ilu lat pochodzi ta łyżka?

Nauczyciel w pierwszej kolejności ustala z uczniami, jaki model określa datowanie radiowęglowe:

$$N = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$$

Następnie uczniowie wstawiają do modelu wyznaczone przez archeologów dane:

$0{,}785N_0 = N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$, czyli po podzieleniu przez N_0 mamy:

$$0{,}785 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}.$$

W dalszej części ustalają, jaki będzie sposób rozwiązania takiego równania. Okazuje się, że aby pozbyć się wykładnika, najlepiej jest równanie zlogarytmować obustronnie:

$$\log 0{,}785 = \frac{t}{5730}\log\frac{1}{2},$$

a stąd po przekształceniach mamy:

$$t = \frac{5730 \log 0,785}{\log 0,5} \approx 2001 .$$

Odp: znaleziona łyżka pochodzi sprzed około 2001 lat.

Temat lekcji: Powtórzenie wiadomości z wielomianów.

Przykład przeprowadzenia zasadniczej części lekcji
Propozycja lekcji z wykorzystaniem gry dydaktycznej — kółko i krzyżyk.

Opis gry
Klasę należy podzielić na dwie drużyny. W każdej drużynie należy ustalić kolejność odpowiadania uczniów. Z puli zadań uczeń losuje pytanie/zadanie. Jeżeli odpowie prawidłowo stawia X lub O w wybranym przez siebie miejscu, jeżeli odpowie błędnie pytanie/zadanie przejmuje drużyna przeciwna. Uczeń, który odpowiadał, przechodzi na koniec kolejki. Wygrywa drużyna, która ustawi w pionie, poziomie lub ukośnie takie same znaki.

Gra zawiera: kartkę papieru, 2 pisaki, karty pytań, stoper, kostkę do gry.

Instrukcja do gry: koordynator tasuje karty pytań, układa karty pytań. O kolejności gry decyduje rzut kostką; rozpoczyna uczeń z drużyny, która wyrzuciła najwyższą liczbę oczek.

Plansza do gry.

Karty do gry: nauczyciel przygotowuje karty. Na odwrocie wyciętych kart wpisuje numery, np. 1. pytanie, 1. odpowiedź.

Czy to wyrażenie jest wielomianem? $-x^2 + 3x - 4$ **Czas: 10 s**
Czy to wyrażenie jest wielomianem? $\sqrt{3}x - 7$ **Czas: 10 s**
Czy to wyrażenie jest wielomianem? $\frac{x^2 - 2}{4}$ **Czas: 10 s**

Określ stopień wielomianu: $-5x^4+3x^3+2x^2-x+1$. **Czas: 10 s**
Określ stopień wielomianu: $5\sqrt{2}$. **Czas: 10 s**
Określ stopień wielomianu: $\sqrt{2}x-1$. **Czas: 10 s**
Oblicz sumę wielomianów: $3x^2+5x-1$ oraz $-4x^2+1$. **Czas: 30 s**
Oblicz różnicę wielomianów: $3x^3+5x^2-7x-1$ oraz $-4x^3+2x^2-x-5$. **Czas: 30 s**
Oblicz iloczyn wielomianów: $3x^3-1$ oraz $3x^3+1$. **Czas: 30 s**
Oblicz iloczyn wielomianów: $3x^3+2x^2-1$ oraz $x-3$. **Czas: 60 s**
Wykonaj działania: $(x-3)^3-2(x-1)^3$. **Czas: 90 s**
Wykonaj działania: $7x(2x-1)^2+3(x-5)^2-(2x-3)^2$. **Czas: 90 s**

Rozwiąż równanie: $-5x(x-3)(x+4)=0$. **Czas: 30 s**
Rozwiąż równanie: $(2x-1)(x^2-x-2)=0$. **Czas: 90 s**
Podaj przykład wielomianu, którego pierwiastkami są dwie pary liczb przeciwnych. **Czas: 20 s**
Podaj przykład wielomianu, którego pierwiastkami jest sześć liczb podzielnych przez 3. **Czas: 60 s**
Rozłóż wielomian $3x^3+27x^2$ na czynniki. **Czas: 40 s**
Rozłóż wielomian x^6-5x^3+6 na czynniki. **Czas: 180 s**
Wykonaj dzielenie: $(x^3-6x+3):(x-1)$. **Czas: 180 s**
Wykonaj dzielenie: $(x^5-2x^4+4x^3-2x^2+3x-7):(x+2)$. **Czas: 300 s**
Rozwiąż równanie: $x^4+7x^2-18=0$. **Czas: 180 s**
Rozwiąż równanie: $x^3-4x^2-4x+16=0$. **Czas: 300 s**

Rozwiąż nierówność: $27x^3 - 8 > 0$. **Czas: 180 s**
Rozwiąż nierówność: $x^3 - 7x - 6 > 0$. **Czas: 300 s**
Rozwiąż nierówność: $-(x^2 - 4)(x+2)(x-3)(x-2) \leq 0$. **Czas: 300 s**

8.1. Sposoby wprowadzania twierdzeń

Twierdzenia w matematyce szkolnej można wprowadzać w sposób problemowy.

Temat lekcji: Reszta dzielenia wielomianu przez dwumian.

Przykład przeprowadzenia zasadniczej części lekcji (podręcznik, s. 19, przykład 4.)
Nauczyciel podczas lekcji będzie wprowadzał twierdzenie mówiące o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian.

Uczniowie znają już twierdzenie:
Dla dowolnego wielomianu P stopnia dodatniego n i wielomianu stopnia pierwszego Q istnieją takie jednoznacznie określone wielomian A i stała B, że: $P = A \cdot Q + B$.

1. Zapiszmy powyższe twierdzenie dla wielomianu W i wielomianu stopnia pierwszego $Q(x) = x - p$. Z twierdzenia wynika, że istnieją taki wielomian $A(x)$ i taka stała B, że:

$W(x) = A(x)(x-p) + B$ (*).

Podstawiając do ostatniej tożsamości $x = p$, otrzymujemy:

$W(p) = A(p)(p-p) + B$.

Zatem: $W(p) = B$.

Ale zapis (*) dla $x \neq p$ jest równoważny zapisowi $\frac{W(x)}{x-p} = A(x) + \frac{B}{x-p}$, czyli obliczone B jest resztą z dzielenia wielomianu W przez $x-p$.

2. Formułujemy twierdzenie:

Reszta z dzielenia wielomianu W przez dwumian $x-p$ jest równa $W(p)$.

Analizujemy strukturę logiczną twierdzenia, wyróżniając założenie i tezę.

Zastanawiamy się nad możliwością zastosowania tego twierdzenia.

Temat lekcji: Zamiana miary stopniowej na łukową i odwrotnie.

Przykład przeprowadzenia zasadniczej części lekcji

Nauczyciel dyktuje treść zadania:

Wyznacz miarę łukową kąta α o mierze 135°.

Uczniowie zauważają, że ponieważ kąt o mierze 180° jest oparty na półokręgu, a długość półokręgu o promieniu 1 wynosi π, więc kąt o mierze kątowej 180° ma miarę łukową π radianów.

Uczniowie przypominają, że rozwartość kąta środkowego jest wprost proporcjonalna do długości łuku wyciętego przez ten kąt.

Nauczyciel naprowadza uczniów na pomysł przedstawienia zadania za pomocą proporcji:

α — $135°$

π — $180°$.

Stąd: $\alpha \cdot 180° = \pi \cdot 135°$, zatem $\alpha = \frac{\pi \cdot 135°}{180°} = \frac{3}{4}\pi$.

Podczas dyskusji uczniowie (pod kierunkiem nauczyciela) dochodzą do wniosku, że można uogólnić zadanie i na podobnej zasadzie wyznaczyć wzór:

$$\alpha° = \frac{\pi \cdot \alpha}{180}.$$

Nauczyciel dyktuje następne zadanie:

Wyznacz miarę stopniową kąta α o mierze $\frac{3}{2}\pi$.

Uczniowie wykonują odpowiednią proporcję:

β — $\frac{3}{2}\pi$

$180° - \pi$.

Stąd: $\dfrac{\frac{3}{2}\pi}{\pi} \cdot 180° = 270°$.

Podczas dyskusji uczniowie (pod kierunkiem nauczyciela) dochodzą do wniosku, że można zadanie uogólnić i na podobnej zasadzie wyznaczyć wzór:

$$\alpha \text{ rad} = \left(\frac{180 \cdot \alpha}{\pi}\right).$$

Temat lekcji: Własność ciągu arytmetycznego.

Przykład przeprowadzenia zasadniczej części lekcji

1. Uczniowie podają przykład pewnego ciągu arytmetycznego, np.: $-8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, 20, \ldots$

Nauczyciel poleca policzenie sumy wyrazów a_1 i a_3, a_2 i a_4, a_3 i a_5. Uczniowie szukają jakichś ciekawych związków między otrzymanymi sumami a wyrazami ciągu. Pod kierunkiem nauczyciela zauważają, że suma dwóch podanych wyrazów jest dwa razy większa od wyrazu stojącego pomiędzy rozważanymi składnikami. Uczniowie sprawdzają postawioną hipotezę dla sum wyrazów a_4 i a_6, a_5 i a_7. Próbują uzasadnić postawioną hipotezę. Po przeprowadzonej dyskusji nauczyciel zapisuje, że $n+1$ wyrazów ciągu arytmetycznego spełnia na podstawie definicji zależność:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n = r.$$

Zauważmy stąd, że dla dowolnego n $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$.

Nauczyciel prosi uczniów o wyciągnięcie wniosku z ostatniej równości. Następnie wspólnie z uczniami zapisuje wniosek na tablicy:

$2 \cdot a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, czyli

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Na zakończenie formułuje werbalnie odkryte twierdzenie:

W ciągu arytmetycznym każdy wyraz ciągu oprócz pierwszego (i ostatniego, jeśli ciąg jest skończony) jest średnią arytmetyczną dwóch wyrazów sąsiednich: poprzedniego i następnego.


PROGRAM PARTNERSKI
GRUPY WYDAWNICZEJ HELION
1. ZAREJESTRUJ SIĘ
2. PREZENTUJ KSIĄŻKI
3. ZBIERAJ PROWIZJĘ
Zmień swoją stronę WWW
w działający bankomat!
Dowiedz się więcej i dołącz już dzisiaj!
http://program-partnerski.helion.pl
GRUPA WYDAWNICZA
Helion SA

Dobre wyniki z matematyki!

Poradnik metodyczny dla nauczycieli szkół ponadgimnazjalnych, zarówno liceów, jak i techników, omawia materiał na poziomie podstawowym i rozszerzonym. Jest świetnym wsparciem, które pozwoli Państwu przygotować lekcje w niekonwencjonalny sposób i dotrzeć nawet do uczniów mało zainteresowanych tematem. Razem bez trudu uda Wam się przerobić materiał wymagany na egzaminie maturalnym. Poradnik ten obala stereotyp mówiący, iż do zrozumienia matematyki niezbędne jest posiadanie „umysłu ścisłego". Autorzy *Matematyki Europejczyka* wiedzą, jak to zrobić!

Matematyka Europejczyka *pomoże nauczycielom:*

- **opracować cele kształcenia i wychowania oraz wybrać najwłaściwsze drogi ich osiągania,**
- **podzielić obowiązujący materiał tak, by stał się on łatwiej przyswajalny dla uczniów,**
- **wybrać odpowiedni sposób rozplanowania lekcji spośród zaproponowanych konspektów,**
- **przygotować młodzież do nadchodzących egzaminów,**
- **korzystać z różnych metod aktywizacji i oceny osiągniętych wyników.**

Komplet podręczników i zbiorów zadań z serii *Matematyka Europejczyka* wydawnictwa Heli pozwala uczniom zdobywać wiedzę poprzez zabawę, a nauczycielom ułatwia przekazywanie nowego materiału w interesujący i niebanalny sposób.

Matematyka Europejczyka — to się liczy!

Helion SA
ul. Kościuszki 1c, 44-100 Gliwice
tel.: 32 230 98 63
e-mail: helion@helion.pl
http://helion.pl

ISBN 978-83-246-2409-6

9 788324 624096