MARIUSZ KAWECKI

Ciekawe zadania z matematyki z kompletnymi rozwiązaniami i dodatkiem teoretycznym

zbiór zadań

dla zainteresowanego matematyką licealisty

ISBN 978-83-947155-0-2

9 788394 715502

Spis treści

Wstęp

Zbiór zadań, który prezentujemy czytelnikowi nie jest typowym zbiorem dla konkretnej klasy w liceum. Jest to książka przeznaczona dla dociekliwego ucznia bez względu, do której klasy uczęszcza. Po książkę powinien sięgnąć również nauczyciel matematyki, któremu zależy na tym, aby lekcje nie były monotonne a przedmiot wciągnął słuchacza.

Do rozwiązania większości zadań nie trzeba perfekcyjnego opanowania teorii, zresztą nie teorię zadania mają sprawdzić. Potrzebny jest tu pewien spryt, otwarty umysł i coś, co na późniejszym etapie nauki nazywa się „kulturą matematyczną”. Niezbędna teoria, której nie ma w programie nauczania, zostanie wyłożona przy okazji. Do rozwiązań proponujemy zajrzeć dopiero po zakończonych sukcesem lub nie, próbach własnych. Oczywiście wszystkie zadania są w zbiorze rozwiązane. Zadania posiadają różny stopień trudności. Są tu zadania zupełnie proste, jak również całkiem skomplikowane, poziomu olimpiad matematycznych czy egzaminów. Zrezygnowano z oznaczania zadań trudniejszych gwiazdkami i celowo przemieszano je z zadaniami łatwiejszymi. Wychodzimy z założenia, że wszystko co ułoży człowiek, inny człowiek potrafi rozwiązać i w świetle tej prawdy wszystkie zadania wydają się łatwe.

Autor dołożył wszelkich starań, żeby pokazać rozwiązania kompletne i w miarę proste. Jeżeli czytelnik odnajdzie inny sposób, być może bardziej elegancki i zechce się nim podzielić z autorem, zyska ogromną wdzięczność korzystających z kolejnych wydań tej książki. Do takiego współzawodnictwa bardzo zachęcamy, wszelkie uwagi prosimy kierować na adres:

ksiazki2017@gmail.com

Mariusz Kawecki

4. **Własności funkcji**.

Zadanie 130
Rozwiązać równanie:

$$x^2 + x - 1 = \frac{\sqrt{4x+5} - 1}{2} \qquad (*)$$

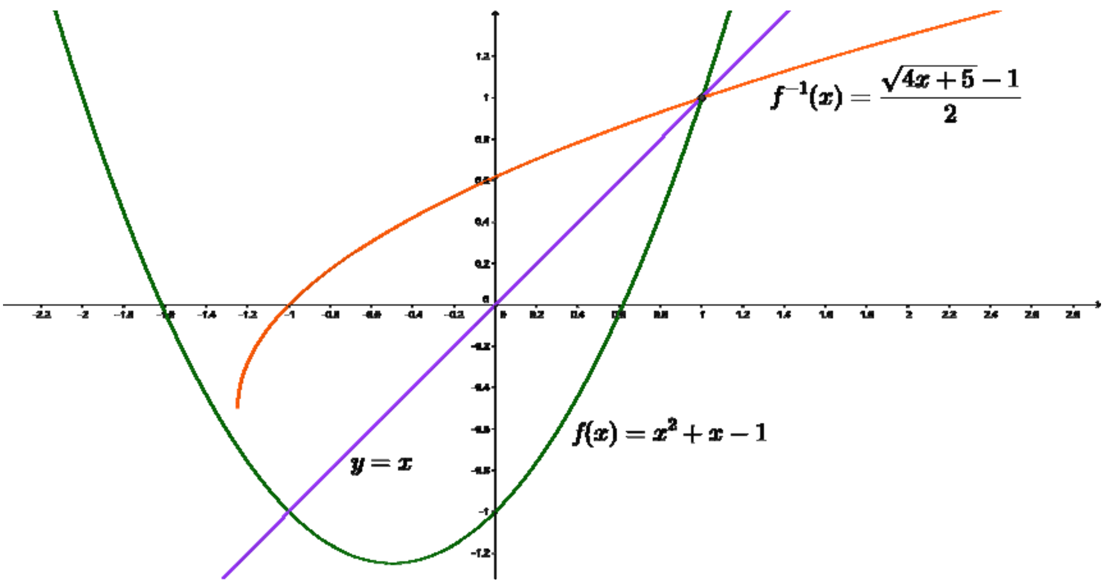
Rozwiązanie

Ustalmy dziedzinę równania (*), $4x+5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{4}$. Oznaczmy prawą stronę równania (*) przez y, mamy wtedy:

$$y = \frac{\sqrt{4x+5} - 1}{2} \Rightarrow (2y+1)^2 = 4x+5 \Rightarrow x = y^2 + y - 1$$

Jeżeli teraz potraktujemy lewą stronę równania (*) jak funkcję $y = f(x)$, to prawa strona będzie funkcją odwrotną do niej $x = f^{-1}(y)$. Przy zamianie zmiennych y na x wykresy funkcjo staną się symetryczne[15] względem prostej $y = x$, czyli jeżeli się przetną to w tych samych punktach, w których prosta $y = x$ przecina każdy z tych wykresów. Równanie (*) jest więc równoważne równaniu:

$$x^2 + x - 1 = x \text{ lub } x = \frac{\sqrt{4x+5} - 1}{2} \qquad (**)$$



[15] Należy pamiętać, że funkcja $y = f(x)$ i funkcja do niej odwrotna $x = f^{-1}(y)$ mają ten sam wykres.

Wybieramy do rozwiązania prostsze:

$$x^2+x-1=x \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x=1 \vee x=-1$$

Obie liczby należą do dziedziny, ale tylko $x=1$ spełnia równanie (*). To, że bardziej skomplikowane równanie da się zastąpić prostszym, równoważnym widoczny jest po sporządzeniu wykresów funkcji. Widać też dlaczego zawsze sprawdzamy rozwiązanie.

Zadanie 131
Rozwiązać równanie:

$$x^2+x+1=\frac{\sqrt{4x-3}-1}{2} \qquad (*)$$

Rozwiązanie

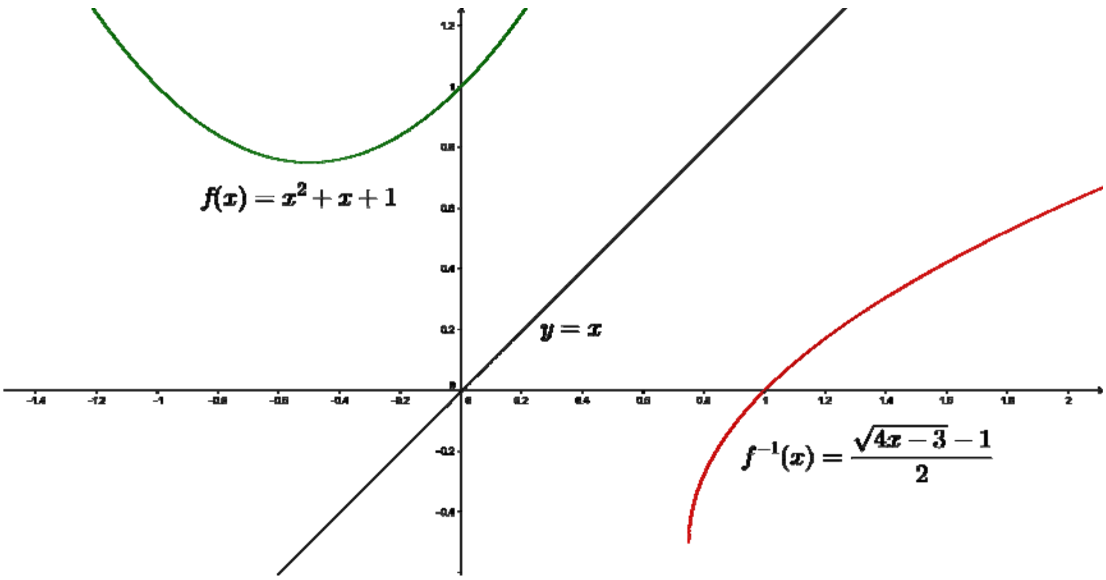
Wyznaczamy dziedzinę $4x-3\geq 0 \Rightarrow x\geq\frac{3}{4}$. Oznaczamy prawą stronę równanie (*) przez y:

$$y=\frac{\sqrt{4x-3}-1}{2} \Rightarrow (2y+1)^2=4x-3 \Rightarrow x=y^2+y+1$$

Po obu stronach równania mamy funkcje wzajemnie odwrotne. W miejsce prawej strony (*) podstawiamy x:

$$x^2+x+1=x \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow x\in\varnothing$$

Brak rozwiązania staje się widoczny po sporządzeniu rysunku:



Zadanie 132

Dla $a\in\left\langle 0,\frac{1}{4}\right\rangle$ rozwiązać równanie:

$$x^2+2ax+\frac{1}{16}=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}} \qquad (*)$$

Rozwiązanie
Oznaczmy prawą stronę równania (*) przez y:

$$y=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}} \Rightarrow (y+a)^2=a^2+x-\frac{1}{16} \Rightarrow x=y^2+2ay+\frac{1}{16}$$

Co oznacza, że prawa strona równania (*) jest funkcją odwrotną do funkcji będącej po lewej stronie równania. Samo równanie jest postaci $f(x)=f^{-1}(x)$ gdzie:

$$f(x)=x^2+2ax+\frac{1}{16}$$

Jest to funkcja kwadratowa, jednoznaczna od wierzchołka paraboli czyli od punktu $A\left(-a,\frac{1}{16}-a^2\right)$. Szukamy punktów wspólnych z prostą $y=x$.

$$x^2+2ax+\frac{1}{16}=x \Rightarrow x^2+(2a-1)x+\frac{1}{16}=0$$

$$\Delta=(2a-1)^2-\frac{1}{4}=\left(2a-\frac{3}{2}\right)\left(2a-\frac{1}{2}\right)\geq 0 \Rightarrow a\in\left(-\infty,\frac{1}{4}\right\rangle\cup\left\langle\frac{3}{4},+\infty\right)$$

Zbiór, w którym zawarty jest parametr zawiera się w zbiorze dla którego istnieją rozwiązania.

$$x_1=-\frac{(2a-1)+\sqrt{\left(2a-\frac{3}{2}\right)\left(2a-\frac{1}{2}\right)}}{2},\ x_2=\frac{-(2a-1)+\sqrt{\left(2a-\frac{3}{2}\right)\left(2a-\frac{1}{2}\right)}}{2}$$

Należy dokonać sprawdzenia ale bezpośrednie podstawienie wyliczonych wartości do równania (*) byłoby kłopotliwe. Zauważmy, że wykres naszej funkcji $f(x)$ jest parabolą z ramionami skierowanymi do góry. Funkcja $f(x)$ i funkcja odwrotna $f^{-1}(x)$ przetną się w dwóch punktach, jeżeli wierzchołek paraboli będzie powyżej lub na prostej $y=x$. Dla punktu wierzchołkowego ma więc być spełniona nierówność: $y\geq x$. Podstawiając współrzędne wierzchołka A otrzymujemy:

$$\frac{1}{16}-a^2\geq -a \Rightarrow a^2-a-\frac{1}{16}\leq 0$$

$$\Delta=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4},\ a_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{4},\ a_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{4},\ a\in\left\langle\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{4},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{4}\right\rangle$$

Ponieważ, jak łatwo sprawdzić $\left\langle 0,\frac{1}{4}\right\rangle\subset\left\langle\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{4},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{4}\right\rangle$ obie wartości są poprawne.

Zadanie 133
Rozłożyć wielomian na czynniki:

$$W(x)=x^{10}+x^5+1$$

Rozwiązanie
Zauważmy, że:

$$x^{15}-1=(x^5)^3-1^3=(x^5-1)(x^{10}+x^5+1)$$

$$W(x)=x^{10}+x^5+1=\frac{x^{15}-1}{x^5-1}=\frac{(x^3)^5-1}{x^5-1}=\frac{(x^3-1)(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}=$$

$$=\frac{(x-1)(x^2+x+1)(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}=\frac{(x^2+x+1)(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)}{(x^4+x^3+x^2+x+1)}$$

Bezpośrednio dzieląc obliczamy:

$$(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1):(x^4+x^3+x^2+x+1)=x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-x^{12}-x^{11}-x^{10}-x^9-x^8} \\
\quad -x^{11}-x^{10}-x^8+x^6+x^3+1 \\
\quad \underline{x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7} \\
\qquad x^9+x^7+x^6+x^3+1 \\
\qquad \underline{-x^9-x^8-x^7-x^6-x^5} \\
\qquad\quad -x^8-x^5+x^3+1 \\
\qquad\quad \underline{x^8+x^7+x^6+x^5+x^4} \\
\qquad\qquad x^7+x^6+x^4+x^3+1 \\
\qquad\qquad \underline{-x^7-x^6-x^5-x^4-x^3} \\
\qquad\qquad\quad -x^5+1 \\
\qquad\qquad\quad \underline{x^5+x^4+x^3+x^2+x} \\
\qquad\qquad\qquad x^4+x^3+x^2+x+1 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{x^4+x^3+x^2+x+1}
\end{array}$$

Ostatecznie:

$$W(x)=(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$$

Zadanie 134
Rozłożyć na czynniki wielomian trzech zmiennych:

$$Q(x,y,z)=(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$$

Rozwiązanie
Zauważmy, że wielomian przyjmuje wartość 0 dla $x=y$, $y=z$, $z=x$ co oznacza, że wielomian $Q(x,y,z)$ traktowany jako wielomian jednej zmiennej z dwoma parametrami dzieli się przez każdą z różnic: $x-y,\ y-z,\ z-x$ zatem dzieli się przez ich iloczyn: $(x-y)(y-z)(z-x)$. Mamy więc:

$$Q(x,y,z)=(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=\alpha(x-y)(y-z)(z-x)$$

Podnosząc do trzecich potęg po stronie lewej i wymnażając po stronie prawej, porządkując i porównując współczynniki ustalamy, że $\alpha=3$, stad:

$$Q(x,y,z)=(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$$

Zadanie 135
Udowodnić, że iloczyn czterech kolejnych liczb zwiększony o 1 jest pełnym kwadratem.

Rozwiązanie
Mamy wykazać, że: $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=k^2$. Spróbujemy znaleźć wielomian $Q(x)$, który będzie spełniał warunek:

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=\left[Q(x)+1\right]^2$$

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=Q^2(x)+2Q(x)=Q(x)\left[Q(x)+2\right]$$

ale

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=\left[x(x+3)\right]\left[(x+1)(x+2)\right]=(x^2+3x)(x^2+3x+2)$$

$$(x^2+3x)(x^2+3x+2)=Q(x)\left[Q(x)+2\right]\ \Rightarrow\ Q(x)=x^2+3x$$

W takim razie:

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=\left(n^2+3n+1\right)^2$$

Zadanie 136
Udowodnić, że wielomian o współczynnikach całkowitych:

$$W(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

Przyjmujący dla $x=0$ i $x=1$ wartości nieparzyste, nie ma pierwiastków całkowitych.

Rozwiązanie
Zgodnie z warunkami zadania mamy:

$$W(0)=a_0=2m-1,\ W(1)=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0=2k-1$$

Jeżeli $x=2l$, to wartość:

$$W(2l)=a_n(2l)^n+a_{n-1}(2l)^{n-1}+\ldots+a_1(2l)+a_0=2A+a_0$$

ze względu na a_0 jest nieparzysta. Jeżeli $x=2l+1$, to:

$$W(2+1)=a_n(2l+1)^n+a_{n-1}(2l+1)^{n-1}+\ldots+a_1(2l+1)+a_0=2B+(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0)$$

ze względu na $a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0$ jest również nieparzysta. Dla każdego argumentu wartość wielomianu jest nieparzysta, co jest sprzeczne z warunkami zadania.

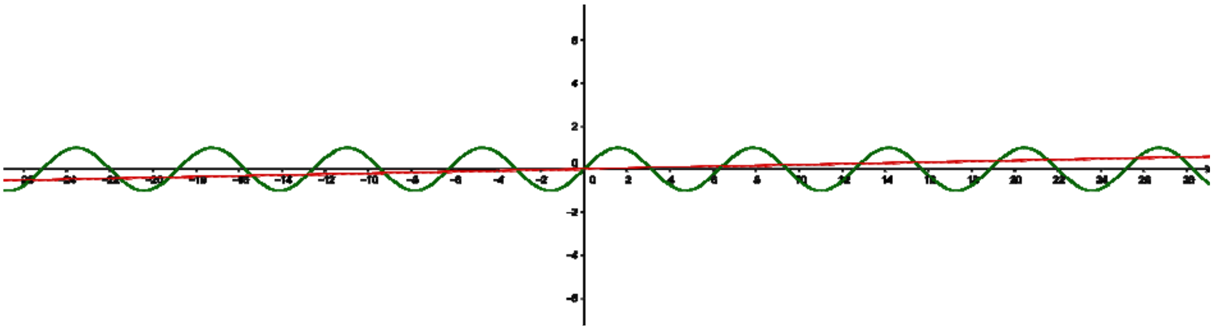
Zadanie 137

Ile rozwiązań ma równanie:

$$\sin x = \frac{x}{50} \qquad (*)$$

Rozwiązanie

Szukamy tu punktów wspólnych krzywej $f(x) = \sin x$ oraz prostej $g(x) = \frac{1}{50}x$. Rysunek poniżej przedstawia fragment wykresu obu linii.



Ze względu na nieparzystość obu funkcji, to jest symetrię ich wykresów względem początku układu współrzędnych, po stronie dodatniej osi OX będzie tyle samo rozwiązań równania co po stronie ujemnej. Do tych rozwiązań należy dodać trywialne rozwiązanie dla $x = 0$.

Zauważmy, że na każdym odcinku $\langle (2n-2)\pi, 2n\pi \rangle$ prosta $g(x)$ w dwóch punktach przetnie sinusoidę $f(x)$ przy czym nastąpi to w pierwszej części rozważanego odcinka, tam gdzie sinusoida jest powyżej osi OX.

Zauważmy ponadto, że powyżej punktów o rzędnych 1 nie może być punktów wspólnych z sinusoidą. Prosta $g(x)$ przechodzi przez punkt o rzędnej 1 dla odciętej 50. Wynika stąd, że punkt (50,1) jest "ostatnim" punktem, który mógłby być wspólny dla sinusoidy i rozpatrywanej prostej. Dzieląc $[50:2\pi]+1=8$ ustalimy ile górnych części sinusoidy "mieści się" w odcinku $\langle 0,50 \rangle$. W każdej części są dwa punkty wspólne, co daje 16 punktów wraz z rozwiązaniem trywialnym dla $x = 0$. Do tego należy dodać 16 rozwiązań po ujemnej stronie osi. Wszystkich rozwiązań równania jest 31.

Zadanie 138

Dla jakiej całkowitej liczby a wyrażenie $(x-a)(x-10)+1$ da się zapisać w postaci wyrażenia $(x+b)(x+c)$ z całkowitymi współczynnikami $b,\ c$. Znaleźć te współczynniki.

Rozwiązanie

Pytamy dla jakich liczb $a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}$ wielomian $P(x) = (x-a)(x-10)+1 = (x+b)(x+c)$.
Obliczając wartość wielomianu dla $x = -b$ lub $x = -c$ wyznaczymy a.

$$P(-c) = (-c-a)(-c-10)+1 = (-c+b)(-c+c) \;\Rightarrow\; (c+a)(c+10) = -1$$