Witold Kołodziej

ANALIZA MATEMATYCZNA

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN

Witold Kołodziej

ANALIZA MATEMATYCZNA

Wydanie piąte

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 2009

Książka ukazała się w latach 1978–1986
nakładem Państwowego Wydawnictwa Naukowego
w serii MATEMATYKA DLA POLITECHNIK

Projekt okładki i stron tytułowych **Małgorzata Podziomek**

Redaktor inicjujący **Izabela Ewa Mika**

ISBN 978-83-01-15970-2

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
02-676 Warszawa, ul. Postępu 18
tel. 022 69 54 321
faks 022 69 54 031
e-mail: pwn@pwn.com.pl
www.pwn.pl

Przedmowa

Książka niniejsza powstała z wykładów prowadzonych przeze mnie na Wydziale Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej Politechniki Warszawskiej i zawiera materiał objęty programem pierwszego roku studiów.

Współczesna analiza matematyczna to przedmiot trudny i zbyt obszerny, by można go było wyłożyć studentom bez odwoływania się do podręcznika. Wykładowca ma do dyspozycji za mało czasu, aby szczegółowo przeprowadzać dowody, a niedomówienia znacznie obniżają wartość wykładu. W polskiej literaturze matematycznej brak jest podręcznika analizy dostosowanego do programu studiów matematyczno-fizycznych wyższych uczelni technicznych. Niniejsza książka stanowi próbę wypełnienia tej luki.

Wykaz podręczników, które okazały się pomocne przy opracowaniu moich wykładów do druku, podany jest na końcu książki.

Poczuwam się do miłego obowiązku złożenia podziękowania prof. W. Żakowskiemu, z którego inicjatywy książka ta powstała. Pragnę również wyrazić serdeczne podziękowanie prof. E. Otto, prof. T. Traczykowi i prof. T. Trajdosowi za życzliwe zainteresowanie książką okazywane w ciągu dwóch długich lat pracy nad nią i cenne rady, jakich mi udzielili. Prof. J. Muszyński był uprzejmy przeczytać maszynopis przed oddaniem go do druku; dzięki jego wnikliwym uwagom zostały usunięte z tekstu liczne usterki, za co jestem mu winien szczególną wdzięczność.

Witold Kołodziej

Warszawa, w listopadzie 1976 r.

Spis rzeczy

Wstęp

Rozdział I. Elementy topologii

Rozdział III. Wstępne wiadomości z rachunku różniczkowego i całkowego

Rozdział IV. Równania różniczkowe zwyczajne

Rozdział V. Ogólna teoria różniczkowania

Rozdział VI. Teoria miary i całki

Rozdział VII. Całki na hiperpowierzchniach

Rozdział VIII. Funkcje zmiennej zespolonej

Rozdział IX. Wstęp do analizy harmonicznej

Wstęp

Zaczniemy od ustalenia podstawowych oznaczeń, jakimi będziemy posługiwać się w tej książce. Uporządkujemy też i uzupełnimy wiadomości z teorii mnogości, niezbędne do zrozumienia wykładu. Przypomnimy także podstawowe własności liczb rzeczywistych i omówimy najważniejsze fakty z teorii liczb zespolonych.

Zakładamy znajomość elementów logiki matematycznej, a w szczególności rachunku zdań. Używamy następujących oznaczeń logicznych:

$\sim$ dla negacji,
$\vee$ dla alternatywy,
$\wedge$ dla koniunkcji,
$\Rightarrow$ dla implikacji,
$\Leftrightarrow$ dla równoważności,
$\bigwedge$ dla kwantyfikatora ogólnego,
$\bigvee$ dla kwantyfikatora szczegółowego.

§ 1. Podstawowe pojęcia mnogościowe

1. Zbiory. W książce tej zbiory oznaczamy wyłącznie literami dużymi, a ich elementy literami małymi. Dla zanotowania, że *a jest elementem zbioru A*, piszemy $a \in A$; jeżeli a nie należy do zbioru A, to piszemy $a \notin A$.

$A \subset B$ lub $B \supset A$ jest zapisem tego, że *zbiór A zawiera się w zbiorze B* (inaczej: jest *podzbiorem* zbioru B), tj. że każdy element zbioru A jest elementem zbioru B.

Zbiór pusty oznaczamy przez $\emptyset$.

Zbiór skończony złożony z elementów $a_1, a_2, \ldots, a_k$ oznaczamy przez $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. W szczególności $\{a\}$ jest symbolem zbioru zawierającego jedynie element a.

Zbiór wszystkich elementów zbioru X mających daną własność w oznaczamy symbolami

$$\{x \in X : w(x)\} \quad \text{i} \quad \{x : w(x)\}$$

(drugiego używamy wtedy, gdy nie może być wątpliwości, jaki zbiór pełni rolę zbioru X).

Zbiory nazywać będziemy także *rodzinami*, *klasami* lub *mnogościami*.

Występujące w analizie matematycznej zbiory są z reguły podzbiorami pewnego ustalonego zbioru, zwanego *przestrzenią*.

Niech dana będzie przestrzeń X i niech każdemu elementowi s pewnego zbioru S przyporządkowany będzie zbiór $A_s \subset X$. Rodzinę złożoną ze wszystkich zbiorów A_s, gdzie $s \in S$, oznaczać będziemy przez $\{A_s\colon s \in S\}$. Zbiór S nazywa się wtedy *zbiorem wskaźników*.

Szczególną rolę w analizie odgrywają zbiory liczb. Dla niektórych z nich rezerwujemy specjalne oznaczenia. Są to zbiory: N — wszystkich liczb naturalnych (1), R — wszystkich liczb rzeczywistych, C — wszystkich liczb zespolonych.

2. Działania na zbiorach. Niech dana będzie rodzina $\mathfrak{R}$ podzbiorów ustalonego zbioru (przestrzeni) X. Zbiór

$$\{x \in X : \bigvee_{A \in \mathfrak{R}} x \in A\}$$

nazywamy *sumą* zbiorów rodziny $\mathfrak{R}$, a zbiór

$$\{x \in X : \bigwedge_{A \in \mathfrak{R}} x \in A\}$$

iloczynem lub *częścią wspólną* zbiorów tej rodziny. Przyjmując $\mathfrak{R} = \{A_s\colon s \in S\}$ używamy oznaczeń $\bigcup_{s \in S} A_s$ dla sumy i $\bigcap_{s \in S} A_s$ dla iloczynu zbiorów rodziny $\mathfrak{R}$.

Sumę zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_k$ oznaczamy przez

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \quad \text{lub} \quad \bigcup_{i=1}^{k} A_i,$$

a ich iloczyn przez

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \quad \text{lub} \quad \bigcap_{i=1}^{k} A_i.$$

Dla sumy zbiorów A_i, gdzie $i = 1, 2, \ldots$, używa się najczęściej symboli

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \quad \text{oraz} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

a dla ich iloczynu — symboli

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \quad \text{oraz} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Liczbę 1, od której zaczyna się numerowanie, możemy zastąpić przez dowolną inną liczbę całkowitą.

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Jeżeli A jest podzbiorem przestrzeni X, to zbiór $X \setminus A$ nazywamy *dopełnieniem* zbioru A.

(1) Tzn. liczb całkowitych dodatnich.

Dla dowolnej rodziny $\{A_s\colon s\in S\}$ podzbiorów przestrzeni X zachodzą następujące związki:

$$X\setminus\bigcup_{s\in S}A_s=\bigcap_{s\in S}(X\setminus A_s)\quad \text{i}\quad X\setminus\bigcap_{s\in S}A_s=\bigcup_{s\in S}(X\setminus A_s).$$

Są to tzw. *prawa De Morgana.*

Jeżeli $A\cap B=\emptyset$, tzn. jeżeli zbiory A i B nie mają elementów wspólnych, to mówimy, że zbiory A i B są *rozłączne.*

3. Produkty kartezjańskie. Pojęcie *pary uporządkowanej* (a, b) – zwanej także *układem uporządkowanym* elementów a i b – można wprowadzić w ścisły sposób przyjmując definicję następującą:

$$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}.$$

Za definicję *trójki uporządkowanej,* czyli układu uporządkowanego trzech elementów, przyjmujemy równość $(a,b,c)=((a,b),c)$. Ogólnie, definicją *układu uporządkowanego k elementów* jest wzór rekurencyjny

$$(a_1,a_2,\ldots,a_k)=((a_1,\ldots,a_{k-1}),a_k). \tag{1}$$

Element a_i nazywa się *i-tą współrzędną* układu (1).

Zauważmy, że $(a_1,a_2,\ldots,a_k)=(b_1,b_2,\ldots,b_k)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_i=b_i$ dla $i=1,2,\ldots,k$.

W przyszłości, dla uproszczenia zapisów, układ uporządkowany, którego wszystkie współrzędne oznaczone są jedną literą, oznaczać będziemy tą samą literą półgrubą; na przykład układ (1) ma w tej notacji symbol $\mathbf{a}$.

Produktem lub *iloczynem kartezjańskim* zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_k$ nazywamy zbiór wszystkich układów uporządkowanych $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$, gdzie $a_i\in A_i$ dla $i=1,2,\ldots,k$. Produkt kartezjański zbiorów $A_1,A_2,\ldots,A_k$ oznaczamy przez

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_k \quad \text{lub}\quad \mathop{\times}_{i=1}^{k} A_i.$$

Zauważmy, że

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_k=(A_1\times\ldots\times A_{k-1})\times A_k.$$

Produkt

$$\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{k\ \text{razy}}$$

oznaczamy przez A^k.

4. Relacje równoważności. Podział na klasy. *Relacją* w zbiorze X nazywamy każdy podzbiór R produktu $X\times X$. Jeżeli $(x,y)\in R$, to mówimy, że *x jest w relacji R z y* i piszemy xRy. Literę R można oczywiście zastąpić innym symbolem; na przykład relacja mniejszości w zbiorze liczb rzeczywistych oznaczana jest przez $<$.

Relację R w zbiorze X nazywamy *relacją równoważności*, jeżeli jest:

1° *zwrotna*, tzn. $\bigwedge_{x \in X} xRx$,

2° *symetryczna*, tzn. $\bigwedge_{x,y \in X} (xRy) \Rightarrow (yRx)$,

3° *przechodnia*, tzn. $\bigwedge_{x,y,z \in X} (xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow (xRz)$.

Niech R będzie relacją równoważności w zbiorze X. Każdemu $y \in X$ można przyporządkować zbiór

$$K_y = \{x \in X: xRy\}.$$

Zbiory K_y nazywamy *klasami relacji R*, a krócej *R-klasami.*

TWIERDZENIE 1. *Dwa elementy $x_1, x_2 \in X$ należą do tej samej R-klasy wtedy i tylko wtedy, gdy x_1Rx_2.*

Różne R-klasy są rozłączne. Każdy element $x \in X$ należy do pewnej R-klasy.

Dowód. Niech $x_1 \in K_y$ i $x_2 \in K_y$. Mamy zatem x_2Ry, a to implikuje yRx_2. Ponieważ x_1Ry, więc stąd wynika, że x_1Rx_2.

Na odwrót, jeżeli x_1Rx_2, to $x_1 \in K_{x_2}$ i również $x_2 \in K_{x_2}$, bo x_2Rx_2.

Załóżmy, że R-klasy K_{y_1} i K_{y_2} mają element wspólny y_0. Jeżeli $x \in K_{y_1}$, to na mocy tego, co już udowodniliśmy, xRy_0. Ponieważ y_0Ry_2, więc także xRy_2, tzn. $x \in K_{y_2}$. Zatem $K_{y_1} \subset K_{y_2}$ i wobec równouprawnienia obu R-klas $K_{y_2} \subset K_{y_1}$, a stąd $K_{y_1} = K_{y_2}$.

Pozostaje zauważyć, że $x \in K_x$ dla każdego $x \in X$.

Rodzinę podzbiorów rozłącznych zbioru X, taką że każdy element $x \in X$ należy do któregoś ze zbiorów tej rodziny, nazywa się *podziałem* zbioru X. Twierdzenie 1 mówi, że jeżeli R jest relacją równoważności w zbiorze X, to rodzina wszystkich R-klas jest podziałem zbioru X.

5. Funkcje. Niech dane będą zbiory niepuste X i Y. Zapis

$$f: X \to Y$$

oznacza, że na zbiorze X określona jest *funkcja f o wartościach w zbiorze Y*, tzn. że każdemu elementowi $x \in X$ przyporządkowany został jednoznacznie element $y \in Y$, oznaczany przez $f(x)$ — co zapisujemy

$$x \to f(x). \tag{2}$$

Zbiór X nazywa się *dziedziną* funkcji f.

Czasami symbol $f(x)$ okazuje się niewygodny; wówczas zastępujemy go przez $f \cdot x$. Niekiedy dla oznaczenia funkcji zamiast f używamy symbolu (2) — wtedy mianowicie, gdy wiadomo, jak $f(x)$ wyraża się przez x (na przykład mówimy o funkcjach $x \to x^2$, $x \to \cos x$ itp. nie wprowadzając dla nich specjalnych oznaczeń literowych).

Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy także *odwzorowaniem* zbioru X w zbiór Y albo *operacją* (odwzorowującą zbiór X w zbiór Y).

Oczywiście dla oznaczenia funkcji można używać zamiast f dowolnej innej litery

Zauważmy, że do pojęcia funkcji odwołaliśmy się już wcześniej, mówiąc o rodzinie zbiorów $\{A_s: s\in S\}$. Określenie takiej rodziny wymaga uprzedniego określenia funkcji $s\to A_s$.

Najprostszym przykładem funkcji jest *funkcja stała*: $f=\text{const}$, przyporządkowująca każdemu elementowi zbioru X ten sam element c zbioru Y. Aby nie komplikować zapisów, funkcję taką będziemy oznaczać dalej po prostu przez c (oczywiście nie w przypadkach, kiedy to mogłoby prowadzić do nieporozumień).

Inny przykład to *identyczność*. Jest to odwzorowanie $\mathrm{id}_X\colon X\to X$ określone równością

$$\bigwedge_{x\in X}\mathrm{id}_X(x)=x.$$

Wykresem funkcji $f\colon X\to Y$ nazywamy podzbiór

$$\{(x,y): (x\in X)\wedge(y=f(x))\}$$

produktu kartezjańskiego $X\times Y$.

Przyjęta przez nas tradycyjna definicja funkcji, oparta na intuicyjnym pojęciu przyporządkowania, oczywiście nie jest całkiem precyzyjna (czym jest właściwie przyporządkowanie?). Dlatego obecnie używana jest często zamiast niej inna definicja. Mianowicie przez funkcję określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y rozumie się każdy podzbiór f produktu kartezjańskiego $X\times Y$ mający tę własność, że dla każdego elementu $x\in X$ istnieje dokładnie jeden element $y\in Y$ — oznaczany przez $f(x)$ — taki, że $(x,y)\in f$. Definicja taka odpowiada współczesnym wymaganiom pod względem ścisłości. Ma ona jednak tę wadę, że identyfikuje funkcję z jej wykresem. Ponieważ bardziej naturalne wydaje się rozróżnianie tych pojęć, więc w tej książce posługujemy się tradycyjną definicją funkcji.

Funkcję

$$n\to a_n \tag{3}$$

określoną na zbiorze wszystkich liczb naturalnych nazywamy *ciągiem* (dokładniej: *ciągiem nieskończonym*) i oznaczamy przez

$$(a_1, a_2, \ldots)\quad\text{lub}\quad(a_n). \tag{4}$$

Element a_n nazywa się *n-tym wyrazem* albo *n-tą współrzędną ciągu* (4). Zbiór wszystkich wyrazów ciągu (4) oznaczamy przez

$$\{a_1, a_2, \ldots\}\quad\text{lub}\quad\{a_n: n\in N\}.$$

Funkcja (3) określona na zbiorze $\{1, 2, \ldots, k\}$ nosi nazwę *ciągu skończonego* (*k-wyrazowego*); można ją oczywiście utożsamiać z układem uporządkowanym $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Funkcję

$$(i,j)\to a_{ij}$$

określoną na produkcie $\{1, 2, \ldots, n\}\times\{1, 2, \ldots, m\}$ nazywamy *macierzą* o elementach a_{ij} i oznaczamy przez

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

lub przez $[a_1, a_2, \ldots, a_m]$, gdzie $a_j=(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$ dla $j=1, 2, \ldots, m$ (a_j jest j-tą kolumną tej macierzy), albo po prostu symbolem $[a_{ij}]$.

Niech dana będzie funkcja $f\colon X\to Y$.

Jeżeli w jest pewną własnością elementów zbioru X, to zbiór wszystkich elementów $f(x)$, gdzie x jest dowolnym elementem zbioru X mającym własność w, oznaczać będziemy symbolem

$$\{f(x): w(x)\}.$$

Jeżeli $A\subset X$, to zbiór

$$f(A)=\{f(x): x\in A\}$$

nazywamy *obrazem* zbioru A. Wprost z definicji wynika

TWIERDZENIE 2. *Dla dowolnych podzbiorów A_1, A_2 i A_s ($s\in S$) zbioru X*

(a_1) $(A_1\subset A_2)\Rightarrow (f(A_1)\subset f(A_2))$,

(a_2) $f(\bigcup_{s\in S} A_s)=\bigcup_{s\in S} f(A_s)$,

(a_3) $f(\bigcap_{s\in S} A_s)\subset \bigcap_{s\in S} f(A_s)$.

Zauważmy, że inkluzja w (a_3) nie może być zastąpiona równością. Na przykład jeżeli $X=A_1\cup A_2$, $A_1\neq\emptyset$, $A_2\neq\emptyset$, $A_1\cap A_2\neq\emptyset$ i $f=\text{const}=c$, to $f(A_1\cap A_2)=\emptyset\neq f(A_1)\cap f(A_2)=\{c\}$.

Zbiór $f(X)$ nazywamy *zbiorem wartości* funkcji f. Jeżeli $f(X)=Y$, to mówimy, że f *odwzorowuje zbiór X na zbiór Y* i piszemy $f\colon X\overset{\text{na}}{\to} Y$. Ogólniej, jeżeli $A\subset X$, $B\subset Y$ i $f(A)=B$, to mówimy, że f *odwzorowuje A na B*.

Niech $B\subset Y$. Zbiór

$$f^{-1}(B)=\{x\in X : f(x)\in B\}$$

nazywamy *przeciwobrazem* zbioru B. Wprost z definicji wynika

TWIERDZENIE 3. *Dla dowolnych podzbiorów B_1, B_2 i B_s ($s\in S$) zbioru Y*

(b_1) $(B_1\subset B_2)\Rightarrow (f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2))$,

(b_2) $f^{-1}(\bigcup_{s\in S} B_s)=\bigcup_{s\in S} f^{-1}(B_s)$,

(b_3) $f^{-1}(\bigcap_{s\in S} B_s)=\bigcap_{s\in S} f^{-1}(B_s)$,

(b_4) $f^{-1}(B_1\setminus B_2)=f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2)$.

Jeżeli dana jest funkcja $f\colon X\to Y$ i zbiór niepusty $A\subset X$, to funkcję $g\colon A\to Y$ określoną równością

$$\bigwedge_{x\in A} g(x)=f(x)$$

nazywamy *funkcją f zredukowaną do zbioru A* i oznaczamy przez $f|A$.

Złożeniem (inaczej: *superpozycją*) funkcji $f: X \to Y$ i $g: Y \to Z$ nazywamy funkcję $g \circ f: X \to Z$ zdefiniowaną następująco:

$$\bigwedge_{x \in X} (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Złożenie $g \circ f$ rozważać będziemy również w przypadku ogólniejszym, gdy $f: X \to Y$, $g: Y_1 \to Z$, $Y_1 \subset Y$ i $A = f^{-1}(Y_1) \neq \emptyset$. Określamy je wtedy równością $g \circ f = g \circ (f|A)$; dziedziną funkcji $g \circ f$ jest podzbiór A dziedziny X funkcji f, na ogół różny od X.

Mówimy, że funkcja $f: X \to Y$ jest *odwracalna* lub że jest *bijekcją* (dokładniej: *bijekcją zbioru X na zbiór $f(X)$*), jeżeli dla każdego $y \in f(X)$ istnieje dokładnie jeden element $x \in X$ taki, że $f(x) = y$. Oczywiście funkcja f jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest *różnowartościowa*, tzn. gdy

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2).$$

Jeżeli funkcja $f: X \to Y$ jest odwracalna, to oznaczając dla każdego $y \in f(X)$ przez $f^{-1}(y)$ jedyny element $x \in X$ taki, że $f(x) = y$, określamy pewną funkcję $f^{-1}: f(X) \to X$, którą nazywamy *funkcją odwrotną* do f. Z definicji

$$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in f(X)} (f^{-1}(y) = x) \Leftrightarrow (f(x) = y),$$

a stąd

(5) $$\bigwedge_{x \in X} f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{oraz} \quad \bigwedge_{y \in f(X)} f(f^{-1}(y)) = y.$$

Jeżeli funkcja f jest odwracalna, to odwracalna jest także funkcja f^{-1} i $(f^{-1})^{-1} = f$.

Zauważmy, że jeżeli f jest bijekcją X na Y, a g bijekcją Y na Z, to $g \circ f$ jest bijekcją X na Z i $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

TWIERDZENIE 4. *Funkcja $f: X \to Y$ jest bijekcją X na Y wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $g: Y \to X$ taka, że*

(6) $$g \circ f = \mathrm{id}_X \quad i \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y.$$

Funkcją g jest funkcja odwrotna f^{-1}.

Dowód konieczności. Jeżeli funkcja f jest bijekcją X na Y, to z (5) wynika, że funkcja $g = f^{-1}$ spełnia oba warunki (6).

Dowód dostateczności. Na mocy pierwszego z warunków (6) $g(f(x)) = x$ dla każdego $x \in X$. Stąd wynika, że jeżeli $f(x_1) = f(x_2)$, to $x_1 = x_2$. Ponieważ dla każdego $y \in Y$ na mocy drugiego z warunków (6) mamy $f(g(y)) = y$, tzn. $f(x) = y$ dla $x = g(y)$, więc $f(X) = Y$ i $f^{-1}(y) = g(y)$ dla wszystkich $y \in Y$. Dowodzi to, że f jest bijekcją X na Y i że $f^{-1} = g$.

Jeżeli X jest podzbiorem produktu $X_1 \times \ldots \times X_k$ i $f: X \to Y$, to element $f(x)$, gdzie $x = (x_1, \ldots, x_k)$, oznacza się również przez

$$f(x_1, \ldots, x_k) \quad \text{lub} \quad f \cdot (x_1, \ldots, x_k)$$

i mówi się, że f jest *funkcją k zmiennych $x_1, \ldots, x_k$*.

Funkcje o wartościach w produkcie $Y_1 \times \ldots \times Y_k$ oznaczać będziemy dużymi literami. Zauważmy, że jeżeli $F: X \to Y_1 \times \ldots \times Y_k$ i $x \in X$, to $F(x)$, jako element rozważanego produktu, ma k współrzędnych; oznaczając je przez $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ mamy

(7) $$\bigwedge_{x \in X} F(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x)).$$

Wobec dowolności elementu $x \in X$ określony został w ten sposób układ funkcji

(8) $$f_i: X \to Y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

które nazywamy *współrzędnymi* funkcji F. Zamiast (7) piszemy krótko

(9) $$F = (f_1, \ldots, f_k).$$

Na odwrót, dla dowolnego układu funkcji (8) wzór (7) lub równoważny mu wzór (9) określa funkcję $F: X \to Y_1 \times \ldots \times Y_k$.

6. Zbiory przeliczalne. Zbiór niepusty A jest *przeliczalny*, jeżeli

(10) $$A = \{a_1, a_2, \ldots\},$$

tzn. gdy jest zbiorem wyrazów pewnego ciągu (a_n). Zbiór pusty uważamy także za przeliczalny.

TWIERDZENIE 5. *Każdy zbiór skończony jest przeliczalny.*

Dowód. Jeżeli $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, to jednocześnie

$$A = \{a_1, \ldots, a_k, a_1, \ldots, a_k, a_1, \ldots\},$$

a zatem — zgodnie z definicją — zbiór A jest przeliczalny.

Przykładem zbioru przeliczalnego nieskończonego jest zbiór wszystkich liczb naturalnych. Zbiór wszystkich liczb całkowitych też jest przeliczalny, ponieważ można mu nadać postać $\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$.

TWIERDZENIE 6. *Podzbiór zbioru przeliczalnego jest zbiorem przeliczalnym.*

Dowód. Niech A będzie zbiorem przeliczalnym i $B \subset A$. Wobec twierdzenia 5 wystarczy zająć się przypadkiem, gdy zbiór B jest nieskończony. Przyjmując równość (10) oznaczmy przez n_1 najmniejszą liczbę naturalną n, dla której $a_n \in B$, następnie przez n_2 najmniejszą liczbę naturalną n większą od n_1 i taką, że $a_n \in B$, przez n_3 najmniejszą liczbę naturalną n większą od n_2 i taką, że $a_n \in B$ itd. Wtedy $B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots\}$, co dowodzi przeliczalności zbioru B.

TWIERDZENIE 7. *Jeżeli A_i ($i = 1, 2, \ldots$) są zbiorami przeliczalnymi, to suma $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ jest zbiorem przeliczalnym.*

Dowód. Można przyjąć, że $A_i \neq \emptyset$ dla każdego wskaźnika i. Z założenia mamy $A_i = \{a_{1i}, a_{2i}, \ldots\}$ dla $i = 1, 2, \ldots$ Przeliczalność sumy zbiorów A_i wynika z równości

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, \ldots, a_{1i}, a_{2,i-1}, \ldots, a_{i-1,2}, a_{i1}, \ldots\}.$$

WNIOSEK. *Jeżeli $A_1, \ldots, A_k$ są zbiorami przeliczalnymi, to suma $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ jest zbiorem przeliczalnym.*

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że $A_1 \cup \ldots \cup A_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, gdzie $A_i = A_k$ dla $i > k$.

TWIERDZENIE 8. *Jeżeli A_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ są zbiorami przeliczalnymi, to produkt $A_1 \times \ldots \times A_k$ jest zbiorem przeliczalnym.*

Dowód. Produkt dwóch zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym. Istotnie, jeżeli $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ i $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$, to

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), \ldots$$
$$\ldots, (a_1, b_n), (a_2, b_{n-1}), \ldots, (a_{n-1}, b_2), (a_n, b_1), \ldots\}.$$

Stąd i z równości

$$A_1 \times \ldots \times A_k = (A_1 \times \ldots \times A_{k-1}) \times A_k$$

wynika, że założenie przeliczalności produktu $k-1$ zbiorów przeliczalnych pociąga za sobą przeliczalność produktu k zbiorów przeliczalnych.

Zastosowanie zasady indukcji kończy dowód.

TWIERDZENIE 9. *Jeżeli zbiór niepusty A jest przeliczalny, to dla każdej funkcji f określonej na A zbiór $f(A)$ jest przeliczalny.*

Dowód. Jeżeli $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, to $f(A) = \{f(a_1), f(a_2), \ldots\}$.

TWIERDZENIE 10. *Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych wymiernych jest przeliczalny.*

Dowód. Przyjmijmy

$$f(n, m) = \frac{m}{n} \quad \text{dla} \quad n \in N, \quad m \in \boldsymbol{R}_c,$$

gdzie $\boldsymbol{R}_c$ oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych całkowitych. Ponieważ na mocy twierdzenia 8 produkt $N \times \boldsymbol{R}_c$, na którym określona jest funkcja f, jest zbiorem przeliczalnym, więc z twierdzenia 9 wynika przeliczalność zbioru $f(N \times \boldsymbol{R}_c)$, tj. zbioru wszystkich liczb wymiernych.

W następnym paragrafie udowodnimy, że zbiór $\boldsymbol{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych jest przykładem zbioru nieprzeliczalnego (tw. 1).

Ćwiczenia

1. Dowieść, że

$$\Big(\bigcup_{s \in S} A_s\Big) \cap \Big(\bigcup_{t \in T} B_t\Big) = \bigcup_{\substack{s \in S \\ t \in T}} (A_s \cap B_t),$$

$$\Big(\bigcap_{s \in S} A_s\Big) \cup \Big(\bigcap_{t \in T} B_t\Big) = \bigcap_{\substack{s \in S \\ t \in T}} (A_s \cup B_t),$$

$$\Big(\bigcup_{s \in S} A_s\Big) \times \Big(\bigcup_{t \in T} B_t\Big) = \bigcup_{\substack{s \in S \\ t \in T}} (A_s \times B_t),$$

$$\Big(\bigcap_{s \in S} A_s\Big) \times \Big(\bigcap_{t \in T} B_t\Big) = \bigcap_{\substack{s \in S \\ t \in T}} (A_s \times B_t).$$

2. Niech dane będą zbiory A_i $(i=1,2,\ldots)$. Dowieść, że jeżeli $B_1=A_1$, $B_i=A_i\setminus(A_1\cup\ldots\cup A_{i-1})$ dla $i=2,3,\ldots$, to zbiory B_i są rozłączne oraz

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

3. Dowieść, że jeżeli f jest funkcją określoną na zbiorze X, to równość

$$f\Big(\bigcap_{s\in S} A_s\Big)=\bigcap_{s\in S} f(A_s)$$

zachodzi dla każdej rodziny $\{A_s\colon s\in S\}$ podzbiorów zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest odwracalna.

4. Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze X i $A_1, A_2\subset X$. Wykazać, że

$$f(A_1)\setminus f(A_2)\subset f(A_1\setminus A_2).$$

Jeżeli funkcja f jest odwracalna, to inkluzję można zastąpić równością.

5. Dowieść, że zbiór nieskończony A jest przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje bijekcja zbioru A na N.

6. Wykazać, że zbiór wszystkich ciągów skończonych o wyrazach wymiernych jest przeliczalny.

7. Wykazać, że zbiór wszystkich ciągów nieskończonych (a_n), gdzie $a_n=0$ lub 1, jest nieprzeliczalny.

8. Wykazać nieprzeliczalność rodziny wszystkich podzbiorów dowolnego zbioru nieskończonego.

§ 2. Liczby rzeczywiste

1. Zbiór R liczb rzeczywistych jako ciało. Podstawowe działania wykonalne w zbiorze liczb rzeczywistych to *dodawanie* i *mnożenie*.

Działanie dodawania

$$(x,y)\to x+y \tag{1}$$

spełnia następujące cztery prawa:

(a$_1$) $\bigwedge_{x,y} x+y=y+x$ (*przemienność*),

(a$_2$) $\bigwedge_{x,y,z} (x+y)+z=x+(y+z)$ (*łączność*),

(a$_3$) $\bigvee_{0}\bigwedge_{x} x+0=x$,

(a$_4$) $\bigwedge_{x}\bigvee_{z} x+z=0$, oznaczenie: $z=-x$.

Jak wiadomo, prostymi wnioskami z własności (a$_1$) - (a$_4$) są następujące podstawowe fakty:

(b$_1$) liczba 0 (*zero*) jest tylko jedna,

(b$_2$) dla dowolnej pary liczb x i y istnieje dokładnie jedna liczba z (*różnica* $y-x$) taka, że $x+z=y$; w szczególności każdej liczbie x przyporządkowana jest dokładnie jedna liczba $-x$ (*przeciwna* do x).

Działanie mnożenia

(2) $$(x, y) \to xy$$

podporządkowane jest podobnym prawom:

(a_5) $\bigwedge_{x,y} xy = yx$ (*przemienność*),

(a_6) $\bigwedge_{x,y,z} (xy)z = x(yz)$ (*łączność*),

(a_7) $\bigvee_{1 \neq 0} \bigwedge_{x} x1 = x$,

(a_8) $\bigwedge_{x \neq 0} \bigvee_{z} xz = 1$, oznaczenie: $z = 1/x$.

Stąd można wyprowadzić, że:

(b_3) liczba 1 (*jedność*) jest tylko jedna,

(b_4) dla dowolnej pary liczb x i y, gdzie $x \neq 0$, istnieje dokładnie jedna liczba z (*iloraz* y/x) taka, że $xz = y$; w szczególności każdej liczbie $x \neq 0$ przyporządkowana jest dokładnie jedna liczba $1/x$ (*odwrotność* liczby x).

Jako ostatni wymienimy warunek:

(a_9) $\bigwedge_{x,y,z} x(y+z) = xy + xz$ (*rozdzielność mnożenia względem dodawania*).

Każdy zbiór X, w którym są określone dwa działania: dodawanie (1) i mnożenie (2) (funkcje odwzorowujące $X \times X$ w X) w ten sposób, że są spełnione warunki (a_1) - (a_9), nazywamy *ciałem*.

2. Relacja mniejszości. Zasada ciągłości. Podstawowe własności *relacji mniejszości* w zbiorze liczb rzeczywistych to:

(a_{10}) $\bigwedge_{x,y} (x \neq y) \Rightarrow ((x < y) \vee (y < x))$,

(a_{11}) $\bigwedge_{x,y} (x < y) \vee (x = y) \Rightarrow (\sim(y < x))$ (*asymetryczność*),

(a_{12}) $\bigwedge_{x,y,z} (x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$ (*przechodniość*).

Relacja mniejszości związana jest z działaniami następującymi zależnościami:

(a_{13}) $\bigwedge_{x,y,z} (x < y) \Rightarrow (x + z < y + z)$,

(a_{14}) $\bigwedge_{x,y} \bigwedge_{z > 0} (x < y) \Rightarrow (xz < yz)$.

Niech dany będzie zbiór $A \subset \mathbf{R}$. Jeżeli istnieje liczba M taka, że

(3) $$\bigwedge_{x \in A} x \leqslant M \quad \text{i} \quad \bigwedge_{M_1 < M} \bigvee_{x \in A} x > M_1,$$

to M nazywamy *kresem górnym* zbioru A i piszemy $M = \sup A$. Analogicznie, liczbę m taką, że

$$(4) \qquad \bigwedge_{x \in A} x \geqslant m \quad \text{i} \quad \bigwedge_{m_1 > m} \bigvee_{x \in A} x < m_1$$

nazywamy *kresem dolnym* zbioru A i piszemy $m = \inf A$.

Mówimy, że zbiór $A \subset \boldsymbol{R}$ jest *ograniczony z góry*, jeżeli istnieje przynajmniej jedna liczba M spełniająca pierwszy z warunków (3) i że jest *ograniczony z dołu*, jeżeli istnieje przynajmniej jedna liczba m spełniająca pierwszy z warunków (4). Zbiór, który jest ograniczony z góry i jednocześnie jest ograniczony z dołu, nazywamy zbiorem *ograniczonym*.

Zasadą ciągłości nazywa się następująca własność zbiorów liczb rzeczywistych:

(a_{15}) *Każdy niepusty i ograniczony z góry zbiór liczb rzeczywistych ma kres górny. Każdy niepusty i ograniczony z dołu zbiór liczb rzeczywistych ma kres dolny.*

Dla zbioru A nieograniczonego z góry przyjmujemy dodatkowo, że $\sup A = +\infty$, a dla nieograniczonego z dołu, że $\inf A = -\infty$.

Zapisy te mają oczywiście charakter czysto formalny. Nie twierdzimy przecież, że $+\infty$ i $-\infty$ są symbolami jakichś nowych „nieskończonych" liczb [1].

Kresu górnego zbioru A nie należy mylić z liczbą największą w zbiorze A, którą – jeżeli istnieje – oznaczać będziemy przez $\max A$. Oczywiście $\max A$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\sup A \in A$ i wówczas $\max A = \sup A$. Podobnie $\min A$ jest oznaczeniem liczby najmniejszej w zbiorze A. Jej istnienie jest równoważne temu, że $\inf A \in A$ i wówczas $\min A = \inf A$. W szczególności dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dobrze określone są liczby

$$\max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \quad \text{i} \quad \min\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$$

Zauważmy, że definicję kresu górnego zbioru (niepustego) A ograniczonego z góry można zapisać następująco:

$$\sup A = \min\{M : \bigwedge_{x \in A} x \leqslant M\}.$$

Analogicznie dla zbioru A ograniczonego z dołu

$$\inf A = \max\{m : \bigwedge_{x \in A} x \geqslant m\}.$$

Jeżeli dana jest funkcja $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ i własność w elementów zbioru X, to kres górny i kres dolny zbioru $\{f(x) : w(x)\}$ oznaczamy odpowiednio przez

$$\sup_{w(x)} f(x) \quad \text{i} \quad \inf_{w(x)} f(x).$$

Z wymienionych wyżej własności (a_1) - (a_{15}) można wyprowadzić wszystkie inne własności liczb rzeczywistych. Innymi słowy, własności te można przyjąć za aksjomaty i oprzeć na nich całą teorię liczb rzeczywistych.

---

[1] Później jednak nabiorą takiego znaczenia. Zob. § 6.

3. Przedziały. Wartość bezwzględna. Zbiór $I \subset \boldsymbol{R}$ nazywa się *przedziałem*, jeżeli

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in I} \bigwedge_{y \in \boldsymbol{R}} (x_1 < y < x_2) \Rightarrow (y \in I).$$

Zauważmy, że zbiór pusty jest przedziałem.

Niech dany będzie przedział niepusty I. Określone są wtedy kresy $\inf I$ i $\sup I$, które nazywać będziemy *końcami* przedziału I. Jeżeli $\inf I = a \in \boldsymbol{R}$ i $\sup I = b \in \boldsymbol{R}$, to I jest jednym z czterech poniższych zbiorów:

$$\langle a; b\rangle = \{x: a \leqslant x \leqslant b\}, \quad (a; b) = \{x: a < x < b\},$$
$$\langle a; b) = \{x: a \leqslant x < b\}, \quad (a; b\rangle = \{x: a < x \leqslant b\}.$$

Jeżeli $\inf I = a \in \boldsymbol{R}$, $\sup I = +\infty$, to I jest jednym z dwóch następujących zbiorów

$$\langle a; +\infty) = \{x: x \geqslant a\}, \quad (a; +\infty) = \{x: x > a\}.$$

Jeżeli $\inf I = -\infty$, $\sup I = b \in \boldsymbol{R}$, to I jest jednym z dwóch następujących zbiorów:

$$(-\infty; b\rangle = \{x: x \leqslant b\}, \quad (-\infty; b) = \{x: x < b\}.$$

Jeżeli $\inf I = -\infty$, $\sup I = +\infty$, to $I = (-\infty; +\infty) = \boldsymbol{R}$.

Przedział $\langle 0; \infty)$ – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nieujemnych – oznaczać będziemy także przez $\boldsymbol{R}_+$.

Przedział $\langle a; b\rangle$ nazywać będziemy *domkniętym*, przedziały $(a; b)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ i $(-\infty; +\infty)$ – *otwartymi*; pozostałe przedziały określamy jako *domknięto-otwarte*

Definicją *wartości bezwzględnej* (inaczej: *modułu*) $|x|$ liczby $x \in \boldsymbol{R}$ jest

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \geqslant 0, \\ -x & \text{dla} \quad x < 0. \end{cases}$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzą następujące dwa związki o podstawowym znaczeniu:

(5) $$|x+y| \leqslant |x| + |y| \quad \text{oraz} \quad |xy| = |x|\,|y|.$$

Zauważmy, że dla każdej liczby rzeczywistej a i dowolnego $r > 0$

$$\{x: |x-a| < r\} = (a-r; a+r),$$
$$\{x: |x-a| \leqslant r\} = \langle a-r; a+r\rangle.$$

4. Przykłady zastosowania zasady ciągłości. Zasada ciągłości pozwoli nam udowodnić zapowiedziane w § 1 (p. 6)

TWIERDZENIE 1. *Zbiór* $\boldsymbol{R}$ *wszystkich liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny.*

Dowód. Zauważmy, że jeżeli dana jest liczba x i przedział niezdegenerowany – tzn. niepusty i nie redukujący się do punktu – I, to istnieje przedział domknięty niezdegenerowany $I' \subset I$ taki, że $x \notin I'$.

Niech I_0 będzie dowolnym przedziałem niezdegenerowanym Przypuśćmy, że

$$(6) \qquad I_0=\{x_1, x_2, \ \},$$

tj. że I_0 jest zbiorem przeliczalnym. Istnieje taki przedział domknięty niezdegenerowany $I_1 \subset I_0$, że $x_1 \notin I_1$, z kolei istnieje przedział domknięty niezdegenerowany $I_2 \subset I_1$ taki, że $x_2 \notin I_2$ itd. W rezultacie określimy nieskończony ciąg (I_n) **przedziałów** domkniętych taki, że dla każdego $n \in N$

$$I_n \subset I_{n-1} \quad \text{i} \quad x_n \notin I_n .$$

Przyjmijmy $I_n=\langle a_n; b_n\rangle$. Dla $m>n$ mamy $I_m \subset I_n$, a więc $a_n \leqslant a_m \leqslant b_m \leqslant b_n$. Stąd

$$(7) \qquad a_m \leqslant b_n \quad \text{dla dowolnych} \quad n, m \in N.$$

Niech $A=\{a_1, a_2, \ldots\}$ i $c=\sup A$. Z definicji kresu górnego i (7) wynika, że dla każdego $n \in N$ zachodzi nierówność $a_n \leqslant c \leqslant b_n$, oznaczająca, że $c \in I_n$. Wobec (6) dla pewnego wskaźnika m mamy $x_m=c$, a w takim razie $x_m \in I_m$, co przeczy temu, że $x_n \notin I_n$ dla wszystkich $n \in N$.

Z dowiedzionej nieprzeliczalności przedziałów niezdegenerowanych wynika nieprzeliczalność zbioru $\boldsymbol{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych (zob. § 1, tw. 6).

Zasada ciągłości umożliwia zdefiniowanie potęgi a^α o dowolnej podstawie $a>0$ i dowolnym wykładniku α. Dokonuje się tego w kilku krokach: Najpierw w zwykły sposób określamy potęgę o dowolnej podstawie $a>0$ i wykładniku całkowitym. Następnie dla dowolnego $n \in N$ definiujemy potęgę o wykładniku $\alpha=1/n$ równością

$$a^{1/n}=\inf\{x: (x>0) \wedge (x^n \geqslant a)\}$$

(nietrudno sprawdzić, że $a^{1/n}=\sqrt[n]{a}$, tj. że $(a^{1/n})^n=a$). Przyjmując dla naturalnego n i całkowego m

$$a^{m/n}=(a^{1/n})^m$$

rozszerzamy definicję potęgi na przypadek dowolnego wykładnika wymiernego. Dla $a \geqslant 1$ potęgę o dowolnym wykładniku α określamy wzorem

$$a^\alpha=\inf\{a^x: (x \in \boldsymbol{R}_w) \wedge (x \geqslant \alpha)\},$$

gdzie $\boldsymbol{R}_w$ oznacza zbiór wszystkich liczb wymiernych. Dla $0<a<1$ za definicję potęgi przyjmujemy równość

$$a^\alpha=\left(\frac{1}{a}\right)^{-\alpha}.$$

Zauważmy, że zawsze

$$1^\alpha=1, \qquad a^0=1.$$

Potęga ma następujące własności rachunkowe:

$$a^{\alpha+\beta}=a^\alpha a^\beta, \qquad a^{\alpha-\beta}=a^\alpha/a^\beta, \qquad a^{\alpha\beta}=(a^\alpha)^\beta,$$

$$(ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha, \qquad (a/b)^\alpha=a^\alpha/b^\alpha.$$