

Witold Kołodziej

ANALIZA
MATEMATYCZNA



W Y D A W N I C T W O N A U K O W E P W N

Witold Kołodziej

ANALIZA MATEMATYCZNA

Wydanie piąte



WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 2009

Książka ukazała się w latach 1978–1986
nakładem Państwowego Wydawnictwa Naukowego
w serii MATEMATYKA DLA POLITECHNIK

Projekt okładki i stron tytułowych **Małgorzata Podziomek**

Redaktor inicjujący **Izabela Ewa Mika**

Copyright © by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1978

Copyright © by Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Warszawa 2009

ISBN 978-83-01-15970-2

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
02-676 Warszawa, ul. Postępu 18
tel. 022 69 54 321
faks 022 69 54 031
e-mail: pwn@pwn.com.pl
www.pwn.pl

Przedmowa

Książka niniejsza powstała z wykładów prowadzonych przeze mnie na Wydziale Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej Politechniki Warszawskiej i zawiera materiał objęty programem pierwszego roku studiów.

Współczesna analiza matematyczna to przedmiot trudny i zbyt obszerny, by można go było wyłożyć studentom bez odwoływania się do podręcznika. Wykładowca ma do dyspozycji za mało czasu, aby szczegółowo przeprowadzać dowody, a niedomówienia znacznie obniżają wartość wykładu. W polskiej literaturze matematycznej brak jest podręcznika analizy dostosowanego do programu studiów matematyczno-fizycznych wyższych uczelni technicznych. Niniejsza książka stanowi próbę wypełnienia tej luki.

Wykaz podręczników, które okazały się pomocne przy opracowaniu moich wykładów do druku, podany jest na końcu książki.

Poczuwam się do miłego obowiązku złożenia podziękowania prof. W. Żakowskiemu, z którego inicjatywy książka ta powstała. Pragnę również wyrazić serdeczne podziękowanie prof. E. Otto, prof. T. Traczykowi i prof. T. Trajdosowi za życzliwe zainteresowanie książką okazywane w ciągu dwóch długich lat pracy nad nią i cenne rady, jakich mi udzielili. Prof. J. Muszyński był uprzejmy przeczytać maszynopis przed oddaniem go do druku; dzięki jego wnikliwym uwagom zostały usunięte z tekstu liczne usterki, za co jestem mu winien szczególną wdzięczność.

Witold Kołodziej

Warszawa, w listopadzie 1976 r.

Spis rzeczy

Wstęp

§ 1. Podstawowe pojęcia mnogościowe	13
1. Zbiory	13
2. Działania na zbiorach	14
3. Produkty kartezjańskie	15
4. Relacje równoważności. Podział na klasy	15
5. Funkcje	16
6. Zbiory przeliczalne	20
§ 2. Liczby rzeczywiste	22
1. Zbiór \mathbb{R} liczb rzeczywistych jako ciało	22
2. Relacja mniejszości. Zasada ciągłości	23
3. Przedziały. Wartość bezwzględna	25
4. Przykłady zastosowania zasady ciągłości	25
5. Funkcje o wartościach rzeczywistych	27
§ 3. Liczby zespolone	28
1. Ciało \mathbb{C} liczb zespolonych	28
2. Geometryczna interpretacja liczb zespolonych. Moduł i argument liczby	29
3. Funkcje o wartościach zespolonych	30

Rozdział I. Elementy topologii

§ 4. Przestrzenie metryczne	31
1. Definicja	31
2. Średnica zbioru. Zbiory ograniczone	31
3. Granica ciągu punktów	32
§ 5. Granica ciągu liczbowego	34
1. Własności granicy ciągu liczbowego	34
2. Granica ciągu liczb rzeczywistych	36
3. Przykłady	39
4. Liczba e	41
§ 6. Rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych $\tilde{\mathbb{R}}$	43
1. Definicje	43
2. Granice ekstremalne ciągu	44
3. Granica ciągu	46
4. Funkcje o wartościach w $\tilde{\mathbb{R}}$	48

§ 7. Przestrzenie metryczne zupełne	49
1. Definicja. Zupełność przestrzeni R	49
2. Twierdzenie o punkcie stałym	50
§ 8. Produkt kartezjański przestrzeni metrycznych	52
1. Metryka i zbieżność w produkcie	52
2. Produkt przestrzeni zupełnych	54
§ 9. Granica funkcji	55
1. Granica funkcji w punkcie	55
2. Granica funkcji o wartościach liczbowych	56
3. Granica funkcji o wartościach rzeczywistych	57
4. Granica funkcji zmiennej rzeczywistej	58
5. Granica funkcji zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych	59
6. Przykłady	60
§ 10. Funkcje ciągłe	63
1. Definicja i podstawowe twierdzenia	63
2. Przykłady	65
§ 11. Ciągi funkcyjne	68
1. Zbieżność punktowa i zbieżność jednostajna	68
2. Własności granicy ciągu zbieżnego jednostajnie	69
§ 12. Przestrzenie topologiczne	71
1. Topologia. Zbiory otwarte. Wnętrze zbioru	71
2. Zbiory domknięte. Domknięcie zbioru	73
3. Topologia w przestrzeni metrycznej	74
§ 13. Topologia w podzbiorze przestrzeni topologicznej	77
1. Topologia indukowana	77
2. Przypadek przestrzeni metrycznej	78
§ 14. Produkt kartezjański przestrzeni topologicznych	79
1. Topologia w produkcie	79
2. Przypadek produktu przestrzeni metrycznych	79
§ 15. Funkcje ciągłe w przestrzeniach topologicznych	80
1. Definicja	80
2. Homeomorfizmy	81
§ 16. Przestrzenie ośrodkowe	82
1. Definicja	82
2. Przypadek przestrzeni metrycznej	83
3. Produkt kartezjański przestrzeni ośrodkowych	84
§ 17. Przestrzenie zwarte	85
1. Definicja. Przypadek przestrzeni metrycznej	85
2. Produkt kartezjański przestrzeni zwartych	87
3. Funkcje ciągłe na przestrzeniach metrycznych zwartych	88
4. Przestrzeń $C(X; Y)$	90
§ 18. Przestrzenie spójne	91
1. Definicja. Zbiory spójne w przestrzeni R	91
2. Kryteria spójności	92
3. Zastosowanie: funkcje cyklometryczne i funkcja logarytmiczna	93
 Rozdział II. Elementy analizy funkcjonalnej	
§ 19. Przestrzenie unormowane	96
1. Przestrzenie liniowe	96
2. Przykłady	98
3. Podstawowe pojęcia geometryczne	98

4. Przestrzenie unormowane i przestrzenie Banacha	99
5. Produkt kartezjański przestrzeni unormowanych	101
6. Wektory styczne do zbioru. Hiperpłaszczyzna styczna	102
7. Funkcje o wartościach w przestrzeni unormowanej	103
8. Przestrzeń unormowana $C(X; Y)$	104
§ 20. Przestrzenie unitarne	105
1. Iloczyn skalarny. Przestrzenie unitarne i przestrzenie Hilberta	105
2. Ortogonalność. Rzut ortogonalny	107
3. Przestrzenie unitarne skończenie wymiarowe	108
§ 21. Funkcje liniowe	110
1. Definicja. Funkcje liniowe ciągłe	110
2. Zbiór funkcji liniowych ciągłych $L(X; Y)$ jako przestrzeń unormowana	111
3. Przykłady	113
§ 22. Funkcje wieloliniowe	115
1. Definicja. Funkcje wieloliniowe ciągłe	115
2. Przestrzeń $L(X_1, \dots, X_k; Y)$	116
3. Przykłady	116
§ 23. Szeregi	119
1. Szeregi elementów przestrzeni unormowanych. Ogólne kryteria zbieżności	119
2. Przykłady	121
3. Szeregi zbieżne bezwzględnie	123
4. Szeregi liczb nieujemnych	125
5. Szeregi podwójne elementów przestrzeni unormowanej	127
6. Twierdzenie Cauchy'ego o mnożeniu szeregów	130
7. Szeregi podwójne liczb nieujemnych	131
8. Szeregi funkcyjne	133
§ 24. Izomorfizmy i izometrie	136
1. Przestrzenie izomorficzne	136
2. Przestrzenie izometryczne	138
3. Przykłady	139

Rozdział III. Wstępne wiadomości z rachunku różniczkowego i całkowego

§ 25. Pochodna funkcji zmiennej rzeczywistej	142
1. Definicje	142
2. Interpretacja geometryczna pochodnej	143
3. Podstawowe reguły różniczkowania	146
§ 26. Pochodna funkcji zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych	149
1. Przykłady	149
2. Pochodna nieskończona	152
3. Twierdzenia Rolle'a, Lagrange'a i Cauchy'ego	152
4. Reguły de L'Hospitala	154
§ 27. Ogólne twierdzenia o przyrostach dla funkcji zmiennej rzeczywistej	157
1. Problem uogólnienia twierdzeń Lagrange'a i Cauchy'ego na przypadek funkcji o wartościach w przestrzeniach unormowanych	157
2. Zastosowanie: pochodna granicy	158
§ 28. Pochodne wyższych rzędów funkcji zmiennej rzeczywistej	160
1. Definicje	160
2. Zastosowanie pochodnej rzędu drugiego do badania wypukłości funkcji	162
3. Wzór Taylora	164
4. Szereg Taylora	168
5. Funkcja wykładnicza i funkcje trygonometryczne zmiennej zespolonej	169

§ 29. Pochodne cząstkowe funkcji wielu zmiennych rzeczywistych	171
1. Pochodne cząstkowe rzędu pierwszego	171
2. Twierdzenie o przyrostach. Warunek Lipschitza	172
3. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów	173
§ 30. Pochodne kierunkowe	175
1. Definicje	175
2. Związek z pochodnymi cząstkowymi	175
§ 31. Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona	177
1. Funkcja pierwotna	177
2. Całka nieoznaczona	179
3. Reguły całkowania	179
4. Całkowanie funkcji elementarnych	180
§ 32. Całka oznaczona funkcji ciągłej	186
1. Definicja	186
2. Wzory rachunkowe	187
3. Nierówności. Twierdzenie o wartości średniej	188

Rozdział IV. Równania różniczkowe zwyczajne

§ 33. Ogólna teoria równań różniczkowych	191
1. Równanie różniczkowe rzędu pierwszego. Zagadnienie początkowe	191
2. Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego	192
3. Układy równań różniczkowych rzędu pierwszego	199
4. Równania różniczkowe wyższych rzędów	200
§ 34. Równania różniczkowe liniowe	203
1. Układy równań liniowych rzędu pierwszego	203
2. Układy równań liniowych o stałych współczynnikach	206
3. Równanie liniowe rzędu n	209
4. Równanie liniowe rzędu n o stałych współczynnikach	212

Rozdział V. Ogólna teoria różniczkowania

§ 35. Pochodna funkcji określonej na podzbiorze przestrzeni unormowanej	215
1. Definicja. Związek z pochodną kierunkową	215
2. Przypadek funkcji zmiennej rzeczywistej. Równoważność obu definicji pochodnej	216
3. Interpretacja geometryczna pochodnej	217
4. Przykłady	219
5. Liniowość operacji różniczkowania	220
6. Twierdzenie o przyrostach	222
§ 36. Pochodna funkcji wielu zmiennych. Związek z pochodnymi cząstkowymi	224
1. Pochodna funkcji określonej na podzbiorze przestrzeni R^m	224
2. Uogólnienie: pochodna funkcji określonej na podzbiorze produktu przestrzeni unormowanych	224
3. Pochodna funkcji o wartościach w produkcie przestrzeni unormowanych	228
4. Synteza obu przypadków	229
§ 37. Różniczkowanie złożenia	231
1. Ogólne twierdzenie o pochodnej złożenia	231
2. Różniczkowanie złożenia w przestrzeniach arytmetycznych	233
3. Uogólnione twierdzenie o pochodnej iloczynu	234
§ 38. Dyfeomorfizmy	235
1. Różniczkowanie funkcji odwrotnej	235
2. Odwzorowania regularne i dyfeomorfizmy	238

§ 39. Funkcje uwikłane	240
1. Ogólne twierdzenie o funkcjach uwikłanych	240
2. Funkcje uwikłane określone układem równań w przestrzeniach arytmetycznych	243
§ 40. Pochodne wyższych rzędów	245
1. Wstęp	245
2. Pochodna rzędu drugiego	246
3. Pochodna rzędu n	248
4. Przypadek funkcji zmiennej rzeczywistej. Równoważność obu definicji pochodnej rzędu n	250
5. Funkcje klasy C_n	251
6. Pochodna rzędu n funkcji wielu zmiennych rzeczywistych. Związek z pochodnymi cząstkowymi	253
7. Wzór Taylora	256
§ 41. Ekstrema funkcji	260
1. Definicja	260
2. Kryteria	260
 Rozdział VI. Teoria miary i całki	
§ 42. Ogólna teoria miary	266
1. Wstęp	266
2. σ -ciała	266
3. Miara	267
4. Miara zewnętrzna	271
§ 43. Miara Lebesgue'a w R^m	276
1. Przedziały. Objętość przedziału	276
2. Miara Lebesgue'a	279
3. Charakteryzacja zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a	281
§ 44. Funkcje mierzalne	289
1. Definicja	289
2. Działania na funkcjach mierzalnych	291
§ 45. Całka funkcji mierzalnej nieujemnej	295
1. Całka funkcji prostej nieujemnej	295
2. Definicja całki funkcji mierzalnej nieujemnej	299
3. Podstawowe własności całki	301
4. Twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki	305
5. Całka jako funkcja zbioru	306
§ 46. Całka funkcji o wartościach w przestrzeni Banacha	307
1. Całka funkcji prostej	307
2. Całkowalność i definicja całki	310
3. Podstawowe własności funkcji całkownych	312
4. Przypadek funkcji o wartościach rzeczywistych	318
5. Twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki	319
6. Całka jako funkcja zbioru	322
§ 47. Całka Lebesgue'a	324
1. Wstęp	324
2. Całka funkcji ciągłej	324
3. Całka funkcji jednej zmiennej. Całki niewłaściwe	327
4. Zasada Cavalieriego	334
5. Geometryczna interpretacja całki funkcji mierzalnej nieujemnej	340
6. Całkowanie przez sprowadzenie do całki iterowanej	341
7. Całkowanie przez podstawienie	349
8. Całka jako funkcja parametrów	360

Rozdział VII. Całki na hiperpowierzchniach

§ 48. Hiperpowierzchnie	364
1. Definicja	364
2. Odwzorowania regularne podzbiorów przestrzeni \mathbb{R}^k w przestrzeń \mathbb{R}^m ($k \leq m$). Dyfeomorfizmy	367
3. Hiperpowierzchnie gładkie i kawałkami gładkie	370
4. Łuki i kontury	377
5. Podprzestrzeń styczna i hiperpłaszczyzna styczna	378
§ 49. Miara i całka na hiperpowierzchniach	382
1. Objętość równoległościanu k -wymiarowego w \mathbb{R}^m	382
2. Miara i całka na hiperpowierzchni gładkiej	385
3. Miara i całka na hiperpowierzchni kawałkami gładkiej	391
§ 50. Formy różniczkowe	394
1. Funkcje wieloliniowe skośnie symetryczne	394
2. Iloczyn zewnętrzny funkcji wieloliniowych skośnie symetrycznych	396
3. Formy różniczkowe	401
4. Iloczyn zewnętrzny form różniczkowych	401
5. Różniczka zewnętrzna funkcji	403
6. Postać kanoniczna formy różniczkowej	403
7. Różniczka zewnętrzna formy różniczkowej	405
8. Zamiana zmiennych w formach różniczkowych	409
§ 51. Orientacja hiperpowierzchni	412
1. Orientacja przestrzeni liniowej skończonej wymiarowej	412
2. Orientacja podprzestrzeni $(k-1)$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej k -wymiarowej	414
3. Orientacja hiperpowierzchni. Hiperpowierzchnie orientowalne	415
§ 52. Całka formy różniczkowej na hiperpowierzchni zorientowanej	424
1. Definicja i podstawowe własności całki	424
2. Twierdzenie o rozkładzie jedności	429
3. Twierdzenie Stokesa	432
§ 53. Całka 1-formy po drodze	446
1. Definicja i podstawowe własności całki	446
2. Funkcja pierwotna i niezależność od drogi całkowania	449
3. Przypadek formy zamkniętej	452
4. Interpretacja w teorii pola	458

Rozdział VIII. Funkcje zmiennej zespolonej

§ 54. Różniczkowanie i całkowanie w dziedzinie zespolonej	460
1. Pochodna. Funkcje holomorficzne	460
2. Szeregi potęgowe	461
3. Kryterium różniczkowalności	464
4. Całkowanie po drodze. Funkcja pierwotna	466
5. Logarytm	467
6. Całka krzywoliniowa	469
§ 55. Wzór całkowy Cauchy'ego i jego konsekwencje	473
1. Wzór całkowy Cauchy'ego	473
2. Rozwijalność funkcji holomorficzej w szereg potęgowy. Funkcje analityczne	474
3. Zera funkcji holomorficzej	476
4. Rozwinięcie funkcji holomorficzej w szereg Laurenta	476
5. Punkty osobliwe odosobnione	478
6. Residua funkcji holomorficzej	479

Rozdział IX. Wstęp do analizy harmonicznej

§ 56. Szeregi Fouriera	483
1. Szereg Fouriera funkcji okresowej	483
2. Kryterium Dirichleta	487
3. Funkcje o wahanu skończonym	492
4. Kryterium Jordana	493
§ 57. Wzór całkowy Fouriera	497
1. Wstęp	497
2. Kryteria przedstawialności funkcji wzorem całkowym Fouriera	498
Literatura	502
Skorowidz	503

Zacznijmy od ustalenia podstawowych oznaczeń, jakimi będziemy posługiwać się w tej książce. Uporządkujemy też i uzupełnimy wiadomości z teorii mnogości, niezbędne do zrozumienia wykładu. Przypomnimy także podstawowe własności liczb rzeczywistych i omówimy najważniejsze fakty z teorii liczb zespolonych.

Zakładamy znajomość elementów logiki matematycznej, a w szczególności rachunku zdań. Używamy następujących oznaczeń logicznych:

\sim	dla negacji,
\vee	dla alternatywy,
\wedge	dla koniunkcji,
\Rightarrow	dla implikacji,
\Leftrightarrow	dla równoważności,
\bigwedge	dla kwantyfikatora ogólnego,
\bigvee	dla kwantyfikatora szczegółowego.

§ 1. Podstawowe pojęcia mnogościowe

1. Zbiory. W książce tej zbiory oznaczamy wyłącznie literami dużymi, a ich elementy literami małymi. Dla zanotowania, że *a* jest elementem zbioru *A*, piszemy $a \in A$; jeżeli *a* nie należy do zbioru *A*, to piszemy $a \notin A$.

$A \subset B$ lub $B \supset A$ jest zapisem tego, że *zbiór A zawiera się w zbiorze B* (inaczej: jest *podzbiorem* zbioru *B*), tj. że każdy element zbioru *A* jest elementem zbioru *B*.

Zbiór pusty oznaczamy przez \emptyset .

Zbiór skończony złożony z elementów a_1, a_2, \dots, a_k oznaczamy przez $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. W szczególności $\{a\}$ jest symbolem zbioru zawierającego jedynie element *a*.

Zbiór wszystkich elementów zbioru *X* mających daną własność *w* oznaczamy symbolami

$$\{x \in X : w(x)\} \quad \text{i} \quad \{x : w(x)\}$$

(drugiego używamy wtedy, gdy nie może być wątpliwości, jaki zbiór pełni rolę zbioru *X*).

Zbiory nazywać będziemy także *rodzinami*, *klasami* lub *mnogościami*.

Występujące w analizie matematycznej zbiory są z reguły podzbiorem pewnego ustalonego zbioru, zwanego *przestrzenią*.

Niech dana będzie przestrzeń X i niech każdemu elementowi s pewnego zbioru S przyporządkowany będzie zbiór $A_s \subset X$. Rodzinę złożoną ze wszystkich zbiorów A_s , gdzie $s \in S$, oznaczamy będziemy przez $\{A_s: s \in S\}$. Zbiór S nazywa się wtedy *zbiorem wskaźników*.

Szczególne rolę w analizie odgrywają zbiory liczb. Dla niektórych z nich rezerwujemy specjalne oznaczenia. Są to zbiory: N – wszystkich liczb naturalnych ⁽¹⁾, R – wszystkich liczb rzeczywistych, C – wszystkich liczb zespolonych.

2. Działania na zbiorach. Niech dana będzie rodzina \mathfrak{R} podzbiorów ustalonego zbioru (przestrzeni) X . Zbiór

$$\{x \in X: \bigvee_{A \in \mathfrak{R}} x \in A\}$$

nazywamy *sumą* zbiorów rodziny \mathfrak{R} , a zbiór

$$\{x \in X: \bigwedge_{A \in \mathfrak{R}} x \in A\}$$

iloczynem lub *częścią wspólną* zbiorów tej rodziny. Przyjmując $\mathfrak{R} = \{A_s: s \in S\}$ używamy oznaczeń $\bigcup_{s \in S} A_s$ dla sumy i $\bigcap_{s \in S} A_s$ dla iloczynu zbiorów rodziny \mathfrak{R} .

Sumę zbiorów A_1, A_2, \dots, A_k oznaczamy przez

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \quad \text{lub} \quad \bigcup_{i=1}^k A_i,$$

a ich iloczyn przez

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \quad \text{lub} \quad \bigcap_{i=1}^k A_i.$$

Dla sumy zbiorów A_i , gdzie $i=1, 2, \dots$, używa się najczęściej symboli

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \quad \text{oraz} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

a dla ich iloczynu – symboli

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \quad \text{oraz} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Liczbę 1, od której zaczyna się numerowanie, możemy zastąpić przez dowolną inną liczbę całkowitą.

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \setminus B = \{x \in A: x \notin B\}.$$

Jeżeli A jest podzbiorem przestrzeni X , to zbiór $X \setminus A$ nazywamy *dopełnieniem* zbioru A .

⁽¹⁾ Tzn. liczb całkowitych dodatnich.

Dla dowolnej rodziny $\{A_s: s \in S\}$ podzbiorów przestrzeni X zachodzą następujące związki:

$$X \setminus \bigcup_{s \in S} A_s = \bigcap_{s \in S} (X \setminus A_s) \quad \text{i} \quad X \setminus \bigcap_{s \in S} A_s = \bigcup_{s \in S} (X \setminus A_s).$$

Są to tzw. *prawa De Morgana*.

Jeżeli $A \cap B = \emptyset$, tzn. jeżeli zbiory A i B nie mają elementów wspólnych, to mówimy, że zbiory A i B są *rozłączne*.

3. Produkty kartezyjskie. Pojęcie *pary uporządkowanej* (a, b) – zwanej także *układem uporządkowanym* elementów a i b – można wprowadzić w ścisły sposób przyjmując definicję następującą:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Za definicję *trójki uporządkowanej*, czyli układu uporządkowanego trzech elementów, przyjmujemy równość $(a, b, c) = ((a, b), c)$. Ogólnie, definicją *układu uporządkowanego k elementów* jest wzór rekurencyjny

$$(1) \quad (a_1, a_2, \dots, a_k) = ((a_1, \dots, a_{k-1}), a_k).$$

Element a_i nazywa się *i -tą współrzędną* układu (1).

Zauważmy, że $(a_1, a_2, \dots, a_k) = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_i = b_i$ dla $i = 1, 2, \dots, k$.

W przyszłości, dla uproszczenia zapisów, układ uporządkowany, którego wszystkie współrzędne oznaczone są jedną literą, oznaczać będziemy tą samą literą półgrubą; na przykład układ (1) ma w tej notacji symbol a .

Produkt lub *iloczynem kartezyjskim* zbiorów A_1, A_2, \dots, A_k nazywamy zbiór wszystkich układów uporządkowanych (a_1, a_2, \dots, a_k) , gdzie $a_i \in A_i$ dla $i = 1, 2, \dots, k$. Produkt kartezyjski zbiorów A_1, A_2, \dots, A_k oznaczamy przez

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k \quad \text{lub} \quad \bigtimes_{i=1}^k A_i.$$

Zauważmy, że

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k = (A_1 \times \dots \times A_{k-1}) \times A_k.$$

Produkt

$$\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_k$$

oznaczamy przez A^k .

4. Relacje równoważności. Podział na klasy. *Relacją* w zbiorze X nazywamy każdy podzbiór R produktu $X \times X$. Jeżeli $(x, y) \in R$, to mówimy, że x jest w relacji R z y i piszemy xRy . Literę R można oczywiście zastąpić innym symbolem; na przykład relacja mniejszości w zbiorze liczb rzeczywistych oznaczana jest przez $<$.

Relację R w zbiorze X nazywamy *relacją równoważności*, jeżeli jest:

- 1° *zwrotna*, tzn. $\bigwedge_{x \in X} xRx$,
 2° *symetryczna*, tzn. $\bigwedge_{x, y \in X} (xRy) \Rightarrow (yRx)$,
 3° *przechodnia*, tzn. $\bigwedge_{x, y, z \in X} (xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow (xRz)$.

Niech R będzie relacją równoważności w zbiorze X . Każdemu $y \in X$ można przyporządkować zbiór

$$K_y = \{x \in X : xRy\}.$$

Zbiory K_y nazywamy *klasami relacji R* , a krócej *R -klasami*.

TWIERDZENIE 1. *Dwa elementy $x_1, x_2 \in X$ należą do tej samej R -klasy wtedy i tylko wtedy, gdy x_1Rx_2 .*

Różne R -klasy są rozłączne. Każdy element $x \in X$ należy do pewnej R -klasy.

Dowód. Niech $x_1 \in K_y$ i $x_2 \in K_y$. Mamy zatem x_2Ry , a to implikuje yRx_2 . Ponieważ x_1Ry , więc stąd wynika, że x_1Rx_2 .

Na odwrót, jeżeli x_1Rx_2 , to $x_1 \in K_{x_2}$ i również $x_2 \in K_{x_2}$, bo x_2Rx_2 .

Założmy, że R -klasy K_{y_1} i K_{y_2} mają element wspólny y_0 . Jeżeli $x \in K_{y_1}$, to na mocy tego, co już udowodniliśmy, xRy_0 . Ponieważ y_0Ry_2 , więc także xRy_2 , tzn. $x \in K_{y_2}$. Zatem $K_{y_1} \subset K_{y_2}$ i wobec równouprawnienia obu R -klas $K_{y_2} \subset K_{y_1}$, a stąd $K_{y_1} = K_{y_2}$.

Pozostaje zauważyć, że $x \in K_x$ dla każdego $x \in X$.

Rodzinę podzbiorów rozłącznych zbioru X , taką że każdy element $x \in X$ należy do któregoś ze zbiorów tej rodziny, nazywa się *podziałem* zbioru X . Twierdzenie 1 mówi, że jeżeli R jest relacją równoważności w zbiorze X , to rodzina wszystkich R -klas jest podziałem zbioru X .

5. Funkcje. Niech dane będą zbiory niepuste X i Y . Zapis

$$f: X \rightarrow Y$$

oznacza, że na zbiorze X określona jest *funkcja f o wartościach w zbiorze Y* , tzn. że każdemu elementowi $x \in X$ przyporządkowany został jednoznacznie element $y \in Y$, oznaczany przez $f(x)$ – co zapisujemy

$$(2) \quad x \rightarrow f(x).$$

Zbiór X nazywa się *dziedzina* funkcji f .

Czasami symbol $f(x)$ okazuje się niewygodny; wówczas zastępujemy go przez $f \cdot x$. Niekiedy dla oznaczenia funkcji zamiast f używamy symbolu (2) – wtedy mianowicie, gdy wiadomo, jak $f(x)$ wyraża się przez x (na przykład mówimy o funkcjach $x \rightarrow x^2$, $x \rightarrow \cos x$ itp. nie wprowadzając dla nich specjalnych oznaczeń literowych).

Funkcję $f: X \rightarrow Y$ nazywamy także *odwzorowaniem* zbioru X w zbiór Y albo *operacją* (odwzorowującą zbiór X w zbiór Y).

Oczywiście dla oznaczenia funkcji można używać zamiast f dowolnej innej litery.

Zauważmy, że do pojęcia funkcji odwołaliśmy się już wcześniej, mówiąc o rodzinie zbiorów $\{A_s: s \in S\}$. Określenie takiej rodziny wymaga uprzedniego określenia funkcji $s \rightarrow A_s$.

Najprostszym przykładem funkcji jest *funkcja stała*: $f = \text{const}$, przyporządkowująca każdemu elementowi zbioru X ten sam element c zbioru Y . Aby nie komplikować zapisów, funkcję taką będziemy oznaczać dalej po prostu przez c (oczywiście nie w przypadkach, kiedy to mogłoby prowadzić do nieporozumień).

Inny przykład to *identyczność*. Jest to odwzorowanie $\text{id}_X: X \rightarrow X$ określone równością

$$\bigwedge_{x \in X} \text{id}_X(x) = x.$$

Wykresem funkcji $f: X \rightarrow Y$ nazywamy podzbiór

$$\{(x, y) : (x \in X) \wedge (y = f(x))\}$$

produktu kartezjańskiego $X \times Y$.

Przyjęta przez nas tradycyjna definicja funkcji, oparta na intuicyjnym pojęciu przyporządkowania, oczywiście nie jest całkiem precyzyjna (czym jest właściwie przyporządkowanie?). Dlatego obecnie używana jest często zamiast niej inna definicja. Mianowicie przez funkcję określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y rozumie się każdy podzbiór f produktu kartezjańskiego $X \times Y$ mający tę własność, że dla każdego elementu $x \in X$ istnieje dokładnie jeden element $y \in Y$ — oznaczany przez $f(x)$ — taki, że $(x, y) \in f$. Definicja taka odpowiada współczesnym wymaganiom pod względem ścisłości. Ma ona jednak tę wadę, że identyfikuje funkcję z jej wykresem. Ponieważ bardziej naturalne wydaje się rozróżnianie tych pojęć, więc w tej książce posługujemy się tradycyjną definicją funkcji.

Funkcję

$$(3) \quad n \rightarrow a_n$$

określoną na zbiorze wszystkich liczb naturalnych nazywamy *ciągłem* (dokładniej: *ciągłem nieskończonym*) i oznaczamy przez

$$(4) \quad (a_1, a_2, \dots) \quad \text{lub} \quad (a_n).$$

Element a_n nazywa się *n-tym wyrazem* albo *n-tą współrzędną ciągu* (4). Zbiór wszystkich wyrazów ciągu (4) oznaczamy przez

$$\{a_1, a_2, \dots\} \quad \text{lub} \quad \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Funkcja (3) określona na zbiorze $\{1, 2, \dots, k\}$ nosi nazwę *ciągu skończonego* (*k-wyrazowego*); można ją oczywiście utożsamiać z układem uporządkowanym (a_1, a_2, \dots, a_k) .

Funkcję

$$(i, j) \mapsto a_{ij}$$

określoną na produkcie $\{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ nazywamy *macierzą* o elementach a_{ij} i oznaczamy przez

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

lub przez $[a_1, a_2, \dots, a_m]$, gdzie $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$ dla $j=1, 2, \dots, m$ (a_j jest j -tą kolumną tej macierzy), albo po prostu symbolem $[a_{ij}]$.

Niech dana będzie funkcja $f: X \rightarrow Y$.

Jeżeli w jest pewną własnością elementów zbioru X , to zbiór wszystkich elementów $f(x)$, gdzie x jest dowolnym elementem zbioru X mającym własność w , oznaczać będziemy symbolem

$$\{f(x) : w(x)\}.$$

Jeżeli $A \subset X$, to zbiór

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

nazywamy *obrazem* zbioru A . Wprost z definicji wynika

TWIERDZENIE 2. Dla dowolnych podzbiorów A_1, A_2 i A_s ($s \in S$) zbioru X

$$(a_1) \quad (A_1 \subset A_2) \Rightarrow (f(A_1) \subset f(A_2)),$$

$$(a_2) \quad f\left(\bigcup_{s \in S} A_s\right) = \bigcup_{s \in S} f(A_s),$$

$$(a_3) \quad f\left(\bigcap_{s \in S} A_s\right) \subset \bigcap_{s \in S} f(A_s).$$

Zauważmy, że inkluzja w (a_3) nie może być zastąpiona równością. Na przykład jeżeli $X = A_1 \cup A_2$, $A_1 \neq \emptyset$, $A_2 \neq \emptyset$, $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ i $f = \text{const} = c$, to $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset \neq f(A_1) \cap f(A_2) = \{c\}$.

Zbiór $f(X)$ nazywamy *zbiorem wartości* funkcji f . Jeżeli $f(X) = Y$, to mówimy, że f odwzorowuje zbiór X na zbiór Y i piszemy $f: X \xrightarrow{\text{na}} Y$. Ogólniej, jeżeli $A \subset X$, $B \subset Y$ i $f(A) = B$, to mówimy, że f odwzorowuje A na B .

Niech $B \subset Y$. Zbiór

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

nazywamy *przeciwbrazem* zbioru B . Wprost z definicji wynika

TWIERDZENIE 3. Dla dowolnych podzbiorów B_1, B_2 i B_s ($s \in S$) zbioru Y

$$(b_1) \quad (B_1 \subset B_2) \Rightarrow (f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)),$$

$$(b_2) \quad f^{-1}\left(\bigcup_{s \in S} B_s\right) = \bigcup_{s \in S} f^{-1}(B_s),$$

$$(b_3) \quad f^{-1}\left(\bigcap_{s \in S} B_s\right) = \bigcap_{s \in S} f^{-1}(B_s),$$

$$(b_4) \quad f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2).$$

Jeżeli dana jest funkcja $f: X \rightarrow Y$ i zbiór niepusty $A \subset X$, to funkcję $g: A \rightarrow Y$ określoną równością

$$\bigwedge_{x \in A} g(x) = f(x)$$

nazywamy *funkcją f zredukowaną do zbioru A* i oznaczamy przez $f|_A$.

Złożeniem (inaczej: *superpozycją*) funkcji $f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow Z$ nazywamy funkcję $g \circ f: X \rightarrow Z$ zdefiniowaną następująco:

$$\bigwedge_{x \in X} (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Złożenie $g \circ f$ rozważać będziemy również w przypadku ogólniejszym, gdy $f: X \rightarrow Y$, $g: Y_1 \rightarrow Z$, $Y_1 \subset Y$ i $A = f^{-1}(Y_1) \neq \emptyset$. Określamy je wtedy równością $g \circ f = g \circ (f|_A)$; dziedziną funkcji $g \circ f$ jest podzbiór A dziedziny X funkcji f , na ogół różny od X .

Mówimy, że funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest *odwracalna* lub że jest *bijekcją* (dokładniej: *bijekcją zbioru X na zbiór $f(X)$*), jeżeli dla każdego $y \in f(X)$ istnieje dokładnie jeden element $x \in X$ taki, że $f(x) = y$. Oczywiście funkcja f jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest *różnowartościowa*, tzn. gdy

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2).$$

Jeżeli funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest odwracalna, to oznaczając dla każdego $y \in f(X)$ przez $f^{-1}(y)$ jedyny element $x \in X$ taki, że $f(x) = y$, określamy pewną funkcję $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$, którą nazywamy *funkcją odwrotną do f* . Z definicji

$$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in f(X)} (f^{-1}(y) = x) \Leftrightarrow (f(x) = y),$$

a stąd

$$(5) \quad \bigwedge_{x \in X} f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{oraz} \quad \bigwedge_{y \in f(X)} f(f^{-1}(y)) = y.$$

Jeżeli funkcja f jest odwracalna, to odwracalna jest także funkcja f^{-1} i $(f^{-1})^{-1} = f$. Zauważmy, że jeżeli f jest bijekcją X na Y , a g bijekcją Y na Z , to $g \circ f$ jest bijekcją X na Z i $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

TWIERDZENIE 4. *Funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest bijekcją X na Y wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $g: Y \rightarrow X$ taka, że*

$$(6) \quad g \circ f = \text{id}_X \quad \text{i} \quad f \circ g = \text{id}_Y.$$

Funkcją g jest funkcja odwrotna f^{-1} .

Dowód konieczności. Jeżeli funkcja f jest bijekcją X na Y , to z (5) wynika, że funkcja $g = f^{-1}$ spełnia oba warunki (6).

Dowód dostateczności. Na mocy pierwszego z warunków (6) $g(f(x)) = x$ dla każdego $x \in X$. Stąd wynika, że jeżeli $f(x_1) = f(x_2)$, to $x_1 = x_2$. Ponieważ dla każdego $y \in Y$ na mocy drugiego z warunków (6) mamy $f(g(y)) = y$, tzn. $f(x) = y$ dla $x = g(y)$, więc $f(X) = Y$ i $f^{-1}(y) = g(y)$ dla wszystkich $y \in Y$. Dowodzi to, że f jest bijekcją X na Y i że $f^{-1} = g$.

Jeżeli X jest podzbiorem produktu $X_1 \times \dots \times X_k$ i $f: X \rightarrow Y$, to element $f(x)$, gdzie $x = (x_1, \dots, x_k)$, oznacza się również przez

$$f(x_1, \dots, x_k) \quad \text{lub} \quad f \cdot (x_1, \dots, x_k)$$

i mówi się, że f jest *funkcją k zmiennych x_1, \dots, x_k* .

Funkcje o wartościach w produkcie $Y_1 \times \dots \times Y_k$ oznaczać będziemy dużymi literami. Zauważmy, że jeżeli $F: X \rightarrow Y_1 \times \dots \times Y_k$ i $x \in X$, to $F(x)$, jako element rozważanego produktu, ma k współrzędnych; oznaczając je przez $f_1(x), \dots, f_k(x)$ mamy

$$(7) \quad \bigwedge_{x \in X} F(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x)).$$

Wobec dowolności elementu $x \in X$ określony został w ten sposób układ funkcji

$$(8) \quad f_i: X \rightarrow Y_i, \quad i=1, 2, \dots, k,$$

które nazywamy *współrzędnymi* funkcji F . Zamiast (7) piszemy krótko

$$(9) \quad F = (f_1, \dots, f_k).$$

Na odwrót, dla dowolnego układu funkcji (8) wzór (7) lub równoważny mu wzór (9) określa funkcję $F: X \rightarrow Y_1 \times \dots \times Y_k$.

6. Zbiory przeliczalne. Zbiór niepusty A jest przeliczalny, jeżeli

$$(10) \quad A = \{a_1, a_2, \dots\},$$

ozn. gdy jest zbiorem wyrazów pewnego ciągu (a_n) . Zbiór pusty uważamy także za przeliczalny.

TWIERDZENIE 5. *Każdy zbiór skończony jest przeliczalny.*

Dowód. Jeżeli $A = \{a_1, \dots, a_k\}$, to jednocześnie

$$A = \{a_1, \dots, a_k, a_1, \dots, a_k, a_1, \dots\},$$

a zatem — zgodnie z definicją — zbiór A jest przeliczalny.

Przykładem zbioru przeliczalnego nieskończonego jest zbiór wszystkich liczb naturalnych. Zbiór wszystkich liczb całkowitych też jest przeliczalny, ponieważ można mu nadać postać $\{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$.

TWIERDZENIE 6. *Podzbiór zbioru przeliczalnego jest zbiorem przeliczalnym.*

Dowód. Niech A będzie zbiorem przeliczalnym i $B \subset A$. Wobec twierdzenia 5 wystarczy zająć się przypadkiem, gdy zbiór B jest nieskończony. Przyjmując równość (10) oznaczmy przez n_1 najmniejszą liczbę naturalną n , dla której $a_n \in B$, następnie przez n_2 najmniejszą liczbę naturalną n większą od n_1 i taką, że $a_n \in B$, przez n_3 najmniejszą liczbę naturalną n większą od n_2 i taką, że $a_n \in B$ itd. Wtedy $B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots\}$, co dowodzi przeliczalności zbioru B .

TWIERDZENIE 7. *Jeżeli A_i ($i=1, 2, \dots$) są zbiorami przeliczalnymi, to suma $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ jest zbiorem przeliczalnym.*

Dowód. Można przyjąć, że $A_i \neq \emptyset$ dla każdego wskaźnika i . Z założenia mamy $A_i = \{a_{1i}, a_{2i}, \dots\}$ dla $i=1, 2, \dots$. Przeliczalność sumy zbiorów A_i wynika z równości

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, \dots, a_{1i}, a_{2,i-1}, \dots, a_{i-1,2}, a_{i1}, \dots\}.$$

WNIOSEK. Jeżeli A_1, \dots, A_k są zbiorami przeliczalnymi, to suma $A_1 \cup \dots \cup A_k$ jest zbiorem przeliczalnym.

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że $A_1 \cup \dots \cup A_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, gdzie $A_i = A_k$ dla $i > k$.

TWIERDZENIE 8. Jeżeli A_i ($i=1, 2, \dots, k$) są zbiorami przeliczalnymi, to produkt $A_1 \times \dots \times A_k$ jest zbiorem przeliczalnym.

Dowód. Produkt dwóch zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym. Istotnie, jeżeli $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ i $B = \{b_1, b_2, \dots\}$, to

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), \dots$$

$$\dots, (a_1, b_n), (a_2, b_{n-1}), \dots, (a_{n-1}, b_2), (a_n, b_1), \dots\}.$$

Stąd i z równości

$$A_1 \times \dots \times A_k = (A_1 \times \dots \times A_{k-1}) \times A_k$$

wynika, że założenie przeliczalności produktu $k-1$ zbiorów przeliczalnych pociąga za sobą przeliczalność produktu k zbiorów przeliczalnych.

Zastosowanie zasady indukcji kończy dowód.

TWIERDZENIE 9. Jeżeli zbiór niepusty A jest przeliczalny, to dla każdej funkcji f określonej na A zbiór $f(A)$ jest przeliczalny.

Dowód. Jeżeli $A = \{a_1, a_2, \dots\}$, to $f(A) = \{f(a_1), f(a_2), \dots\}$.

TWIERDZENIE 10. Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych wymiernych jest przeliczalny.

Dowód. Przyjmijmy

$$f(n, m) = \frac{m}{n} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{R}_c,$$

gdzie \mathbb{R}_c oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych całkowitych. Ponieważ na mocy twierdzenia 8 produkt $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_c$, na którym określona jest funkcja f , jest zbiorem przeliczalnym, więc z twierdzenia 9 wynika przeliczalność zbioru $f(\mathbb{N} \times \mathbb{R}_c)$, tj. zbioru wszystkich liczb wymiernych.

W następnym paragrafie udowodnimy, że zbiór \mathbb{R} wszystkich liczb rzeczywistych jest przykładem zbioru nieprzeliczalnego (tw. 1).

Ćwiczenia

1. Dowieść, że

$$\left(\bigcup_{s \in S} A_s \right) \cap \left(\bigcup_{t \in T} B_t \right) = \bigcup_{\substack{s \in S \\ t \in T}} (A_s \cap B_t),$$

$$\left(\bigcap_{s \in S} A_s \right) \cup \left(\bigcap_{t \in T} B_t \right) = \bigcap_{\substack{s \in S \\ t \in T}} (A_s \cup B_t),$$

$$\left(\bigcup_{s \in S} A_s \right) \times \left(\bigcup_{t \in T} B_t \right) = \bigcup_{\substack{s \in S \\ t \in T}} (A_s \times B_t),$$

$$\left(\bigcap_{s \in S} A_s \right) \times \left(\bigcap_{t \in T} B_t \right) = \bigcap_{\substack{s \in S \\ t \in T}} (A_s \times B_t).$$

2. Niech dane będą zbiory A_i ($i=1, 2, \dots$). Dowieść, że jeżeli $B_1 = A_1$, $B_i = A_i \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{i-1})$ dla $i=2, 3, \dots$, to zbiory B_i są rozłączne oraz

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

3. Dowieść, że jeżeli f jest funkcją określoną na zbiorze X , to równość

$$f\left(\bigcap_{s \in S} A_s\right) = \bigcap_{s \in S} f(A_s)$$

zachodzi dla każdej rodziny $\{A_s; s \in S\}$ podzbiorów zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest odwracalna.

4. Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze X i $A_1, A_2 \subset X$. Wykazać, że

$$f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2).$$

Jeżeli funkcja f jest odwracalna, to inkluzję można zastąpić równością.

5. Dowieść, że zbiór nieskończony A jest przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje bijekcja zbioru A na N .

6. Wykazać, że zbiór wszystkich ciągów skończonych o wyrazach wymiernych jest przeliczalny.

7. Wykazać, że zbiór wszystkich ciągów nieskończonych (a_n) , gdzie $a_n = 0$ lub 1 , jest nieprzeliczalny.

8. Wykazać nieprzeliczalność rodziny wszystkich podzbiorów dowolnego zbioru nieskończonego.

§ 2. Liczby rzeczywiste

1. **Zbiór R liczb rzeczywistych jako ciało.** Podstawowe działania wykonalne w zbiorze liczb rzeczywistych to *dodawanie* i *mnożenie*.

Działanie dodawania

$$(1) \quad (x, y) \rightarrow x + y$$

spełnia następujące cztery prawa:

$$(a_1) \quad \bigwedge_{x, y} x + y = y + x \quad (\text{przemienność}),$$

$$(a_2) \quad \bigwedge_{x, y, z} (x + y) + z = x + (y + z) \quad (\text{łączność}),$$

$$(a_3) \quad \bigvee_0 \bigwedge_x x + 0 = x,$$

$$(a_4) \quad \bigwedge_x \bigvee_z x + z = 0, \quad \text{oznaczenie: } z = -x.$$

Jak wiadomo, prostymi wnioskami z własności (a_1) - (a_4) są następujące podstawowe fakty:

(b_1) liczba 0 (*zero*) jest tylko jedna,

(b_2) dla dowolnej pary liczb x i y istnieje dokładnie jedna liczba z (*różnica* $y - x$) taka, że $x + z = y$; w szczególności każdej liczbie x przyporządkowana jest dokładnie jedna liczba $-x$ (*przeciwna do x*).

Działanie mnożenia

$$(2) \quad (x, y) \rightarrow xy$$

podporządkowane jest podobnym prawom:

$$(a_5) \quad \bigwedge_{x, y} xy = yx \text{ (przemienność),}$$

$$(a_6) \quad \bigwedge_{x, y, z} (xy)z = x(yz) \text{ (łączność),}$$

$$(a_7) \quad \bigvee_{1 \neq 0} \bigwedge_x x1 = x,$$

$$(a_8) \quad \bigwedge_{x \neq 0} \bigvee_z xz = 1, \text{ oznaczenie: } z = 1/x.$$

Stąd można wyprowadzić, że:

(b₃) liczba 1 (*jedność*) jest tylko jedna,

(b₄) dla dowolnej pary liczb x i y , gdzie $x \neq 0$, istnieje dokładnie jedna liczba z (*iloraz* y/x) taka, że $xz = y$; w szczególności każdej liczbie $x \neq 0$ przyporządkowana jest dokładnie jedna liczba $1/x$ (*odwrotność* liczby x).

Jako ostatni wymienimy warunek:

$$(a_9) \quad \bigwedge_{x, y, z} x(y+z) = xy + xz \text{ (rozdzielność mnożenia względem dodawania).}$$

Każdy zbiór X , w którym są określone dwa działania: dodawanie (1) i mnożenie (2) (funkcje odwzorowujące $X \times X$ w X) w ten sposób, że są spełnione warunki (a₁) - (a₉), nazywamy *ciałem*.

2. Relacja mniejszości. Zasada ciągłości. Podstawowe własności *relacji mniejszości* w zbiorze liczb rzeczywistych to:

$$(a_{10}) \quad \bigwedge_{x, y} (x \neq y) \Rightarrow ((x < y) \vee (y < x)),$$

$$(a_{11}) \quad \bigwedge_{x, y} (x < y) \vee (x = y) \Rightarrow (\sim(y < x)) \text{ (asymetryczność),}$$

$$(a_{12}) \quad \bigwedge_{x, y, z} (x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z) \text{ (przechodność).}$$

Relacja mniejszości związana jest z działaniami następującymi zależnościami:

$$(a_{13}) \quad \bigwedge_{x, y, z} (x < y) \Rightarrow (x + z < y + z),$$

$$(a_{14}) \quad \bigwedge_{x, y} \bigwedge_{z > 0} (x < y) \Rightarrow (xz < yz).$$

Niech dany będzie zbiór $A \subset \mathbf{R}$. Jeżeli istnieje liczba M taka, że

$$(3) \quad \bigwedge_{x \in A} x \leq M \quad \text{i} \quad \bigwedge_{M_1 < M} \bigvee_{x \in A} x > M_1,$$

to M nazywamy *kresem górnym* zbioru A i piszemy $M = \sup A$. Analogicznie, liczbę m taką, że

$$(4) \quad \bigwedge_{x \in A} x \geq m \quad \text{ i } \quad \bigwedge_{m_1 > m} \bigvee_{x \in A} x < m_1$$

nazywamy *kresem dolnym* zbioru A i piszemy $m = \inf A$.

Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest *ograniczony z góry*, jeżeli istnieje przynajmniej jedna liczba M spełniająca pierwszy z warunków (3) i że jest *ograniczony z dołu*, jeżeli istnieje przynajmniej jedna liczba m spełniająca pierwszy z warunków (4). Zbiór, który jest ograniczony z góry i jednocześnie jest ograniczony z dołu, nazywamy zbiorem *ograniczonym*.

Zasadą ciągłości nazywa się następująca własność zbiorów liczb rzeczywistych:

(a₁₅) *Każdy niepusty i ograniczony z góry zbiór liczb rzeczywistych ma kres górny. Każdy niepusty i ograniczony z dołu zbiór liczb rzeczywistych ma kres dolny.*

Dla zbioru A nieograniczonego z góry przyjmujemy dodatkowo, że $\sup A = +\infty$, a dla nieograniczonego z dołu, że $\inf A = -\infty$.

Zapisy te mają oczywiście charakter czysto formalny. Nie twierdzimy przecież, że $+\infty$ i $-\infty$ są symbolami jakichś nowych „nieskończonych” liczb (¹).

Kresu górnego zbioru A nie należy mylić z liczbą największą w zbiorze A , którą — jeżeli istnieje — oznaczać będziemy przez $\max A$. Oczywiście $\max A$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\sup A \in A$ i wówczas $\max A = \sup A$. Podobnie $\min A$ jest oznaczeniem liczby najmniejszej w zbiorze A . Jej istnienie jest równoważne temu, że $\inf A \in A$ i wówczas $\min A = \inf A$. W szczególności dla dowolnych liczb rzeczywistych a_1, a_2, \dots, a_k dobrze określone są liczby

$$\max \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \quad \text{ i } \quad \min \{a_1, a_2, \dots, a_k\}.$$

Zauważmy, że definicję kresu górnego zbioru (niepustego) A ograniczonego z góry można zapisać następująco:

$$\sup A = \min \left\{ M : \bigwedge_{x \in A} x \leq M \right\}.$$

Analogicznie dla zbioru A ograniczonego z dołu

$$\inf A = \max \left\{ m : \bigwedge_{x \in A} x \geq m \right\}.$$

Jeżeli dana jest funkcja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ i własność w elementów zbioru X , to kres górny i kres dolny zbioru $\{f(x) : w(x)\}$ oznaczamy odpowiednio przez

$$\sup_{w(x)} f(x) \quad \text{ i } \quad \inf_{w(x)} f(x).$$

Z wymienionych wyżej własności (a₁) - (a₁₅) można wyprowadzić wszystkie inne własności liczb rzeczywistych. Innymi słowy, własności te można przyjąć za aksjomaty i oprzeć na nich całą teorię liczb rzeczywistych.

(¹) Później jednak nabiorą takiego znaczenia. Zob. § 6.

3. Przedziały. Wartość bezwzględna. Zbiór $I \subset \mathbf{R}$ nazywa się *przedziałem*, jeżeli

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in I} \bigwedge_{y \in \mathbf{R}} (x_1 < y < x_2) \Rightarrow (y \in I).$$

Zauważmy, że zbiór pusty jest przedziałem.

Niech dany będzie przedział niepusty I . Określone są wtedy kresy $\inf I$ i $\sup I$, które nazywać będziemy *końcami* przedziału I . Jeżeli $\inf I = a \in \mathbf{R}$ i $\sup I = b \in \mathbf{R}$, to I jest jednym z czterech poniższych zbiorów:

$$\begin{aligned} \langle a; b \rangle &= \{x : a \leq x \leq b\}, & (a; b) &= \{x : a < x < b\}, \\ \langle a; b) &= \{x : a \leq x < b\}, & (a; b] &= \{x : a < x \leq b\}. \end{aligned}$$

Jeżeli $\inf I = a \in \mathbf{R}$, $\sup I = +\infty$, to I jest jednym z dwóch następujących zbiorów

$$\langle a; +\infty) = \{x : x \geq a\}, \quad (a; +\infty) = \{x : x > a\}.$$

Jeżeli $\inf I = -\infty$, $\sup I = b \in \mathbf{R}$, to I jest jednym z dwóch następujących zbiorów:

$$(-\infty; b] = \{x : x \leq b\}, \quad (-\infty; b) = \{x : x < b\}.$$

Jeżeli $\inf I = -\infty$, $\sup I = +\infty$, to $I = (-\infty; +\infty) = \mathbf{R}$.

Przedział $\langle 0; \infty) = \mathbf{R}_+$ – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nieujemnych – oznaczają będziemy także przez \mathbf{R}_+ .

Przedział $\langle a; b \rangle$ nazywać będziemy *domkniętym*, przedziały $(a; b)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ i $(-\infty; +\infty)$ – *otwartymi*; pozostałe przedziały określamy jako *domknięto-otwarte*. Definicją *wartości bezwzględnej* (inaczej: *modułu*) $|x|$ liczby $x \in \mathbf{R}$ jest

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0, \\ -x & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzą następujące dwa związki o podstawowym znaczeniu:

$$(5) \quad |x+y| \leq |x| + |y| \quad \text{oraz} \quad |xy| = |x||y|.$$

Zauważmy, że dla każdej liczby rzeczywistej a i dowolnego $r > 0$

$$\begin{aligned} \{x : |x-a| < r\} &= (a-r; a+r), \\ \{x : |x-a| \leq r\} &= \langle a-r; a+r \rangle. \end{aligned}$$

4. Przykłady zastosowania zasady ciągłości. Zasada ciągłości pozwoli nam udowodnić zapowiedziane w § 1 (p. 6)

TWIERDZENIE 1. *Zbiór \mathbf{R} wszystkich liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny.*

Dowód. Zauważmy, że jeżeli dana jest liczba x i przedział niezdegenerowany – tzn. niepusty i nie redukujący się do punktu – I , to istnieje przedział domknięty niezdegenerowany $I' \subset I$ taki, że $x \notin I'$.

Niech I_0 będzie dowolnym przedziałem niezdegenerowanym. Przypuśćmy, że

$$(6) \quad I_0 = \{x_1, x_2, \dots\},$$

tj. że I_0 jest zbiorem przeliczalnym. Istnieje taki przedział domknięty niezdegenerowany $I_1 \subset I_0$, że $x_1 \notin I_1$, z kolei istnieje przedział domknięty niezdegenerowany $I_2 \subset I_1$ taki, że $x_2 \notin I_2$ itd. W rezultacie określimy nieskończony ciąg (I_n) przedziałów domkniętych taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$I_n \subset I_{n-1} \quad \text{i} \quad x_n \notin I_n.$$

Przyjmijmy $I_n = \langle a_n; b_n \rangle$. Dla $m > n$ mamy $I_m \subset I_n$, a więc $a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$. Stąd

$$(7) \quad a_m \leq b_n \quad \text{dla dowolnych} \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Niech $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ i $c = \sup A$. Z definicji kresu górnego i (7) wynika, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $a_n \leq c \leq b_n$, oznaczająca, że $c \in I_n$. Wobec (6) dla pewnego wskaźnika m mamy $x_m = c$, a w takim razie $x_m \in I_m$, co przeczy temu, że $x_n \notin I_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Z dowiedzionej nieprzeliczalności przedziałów niezdegenerowanych wynika nieprzeliczalność zbioru \mathcal{R} wszystkich liczb rzeczywistych (zob. § 1, tw. 6).

Zasada ciągłości umożliwia zdefiniowanie potęgi a^α o dowolnej podstawie $a > 0$ i dowolnym wykładniku α . Dokonuje się tego w kilku krokach: Najpierw w zwykły sposób określamy potęgę o dowolnej podstawie $a > 0$ i wykładniku całkowitym. Następnie dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ definiujemy potęgę o wykładniku $\alpha = 1/n$ równością

$$a^{1/n} = \inf \{x : (x > 0) \wedge (x^n \geq a)\}$$

(nietrudno sprawdzić, że $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, tj. że $(a^{1/n})^n = a$). Przyjmując dla naturalnego n i całkowitego m

$$a^{m/n} = (a^{1/n})^m$$

rozszerzamy definicję potęgi na przypadek dowolnego wykładnika wymiernego. Dla $a \geq 1$ potęgę o dowolnym wykładniku α określamy wzorem

$$a^\alpha = \inf \{a^x : (x \in \mathcal{R}_w) \wedge (x \geq \alpha)\},$$

gdzie \mathcal{R}_w oznacza zbiór wszystkich liczb wymiernych. Dla $0 < a < 1$ za definicję potęgi przyjmujemy równość

$$a^\alpha = \left(\frac{1}{a}\right)^{-\alpha}.$$

Zauważmy, że zawsze

$$1^\alpha = 1, \quad a^0 = 1.$$

Potęga ma następujące własności rachunkowe:

$$a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta, \quad a^{\alpha-\beta} = a^\alpha / a^\beta, \quad a^{\alpha\beta} = (a^\alpha)^\beta,$$

$$(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha, \quad (a/b)^\alpha = a^\alpha / b^\alpha.$$